Resumen

El presente trabajo ha tenido como objetivo explorar las propiedades de modelos cuánticos bidimensionales definidos sobre dos tipos de espacios de fase no-conmutativos: el primero de ellos con parámetros de no-conmutatividad constantes en el espacio de fases, lo que rompe la invariancia de Lorentz, mientras que en el segundo caso la no-conmutatividad es inducida por el corrimiento de las variables canónicas mediante la suma directa de generadores de una representación unitaria irreducible del grupo de Lorentz, preservando así esa simetría.

En primer lugar, analizamos modelos bidimensionales no relativistas con parámetros de no-conmutatividad constantes (tanto en el espacio de coordenadas como en el de momentos), haciendo especial énfasis en el caso de potenciales centrales. Para ello consideramos el generador de las rotaciones sobre los planos de coordenadas y de momentos y el álgebra de Lie generada por las formas cuadráticas en las variables dinámicas invariantes frente a rotaciones, mostrando que el problema de autovalores de tales Hamiltonianos siempre puede ser referido al espacio de representación de las representaciones unitarias irreducibles de los grupos $SL(2, \mathbb{R})$ o $SU(2)$, según sea la relación entre los parámetros de no-conmutatividad. La existencia de dos fases cuánticas para estos sistemas había sido encontrada en [1], donde se empleó una realización lineal de las variables dinámicas en términos de operadores de creación y destrucción. Nuestro aporte muestra que esa estructura algebraica es independiente de la realización particular de las variables dinámicas no-conmutativas utilizada y está determinada sólo por las relaciones de conmutación entre ellas. En ese contexto, discutimos explícitamente interacciones cuadráticas tales como el oscilador armónico y el problema de Landau y, utilizando el desarrollo espectral de potenciales centrales, estudiamos el pozo circular (finito e infinito) en el plano no-conmutativo con el fin de introducir un borde en ese espacio difuso.

En segundo lugar, consideramos modelos de una partícula en un espacio de Minkowski de $(2+1)$ dimensiones dotado de una no-conmutatividad no-standard, que puede considerarse inducida por el corrimiento de variables canónicas de coordenadas y momento mediante la suma directa de generadores de una representación unitaria irreducible de $SL(2, \mathbb{R})$, grupo de Lorentz de ese espacio. Esta definición fue interpretada en el contexto de la descomposición de Levi del álgebra deformada que satisfacen las variables dinámicas no-conmutativas. En ese contexto, se estudió el problema de Landau y del oscilador armónico, tanto para partículas de Schrödinger como de Dirac, cuyos Hamiltonianos fueron obtenidos a través del corrimiento de Bopp no abeliano antes descrito a partir del problema usual en el plano conmutativo. Los espectros para estos modelos se estudiaron a través de teoría de perturbaciones tanto para pequeños como para grandes parámetros de no-conmutatividad.

Mientras que en el espacio conmutativo usual el problema de Landau se reduce al de un oscilador armónico con un término de momento angular, en este espacio no conmutativo la extensión es no trivial ya que $\hat{L}_\mu$ tiene una estructura interna dada por los generadores de $SL(2, \mathbb{R})$.

Cabe señalar que en estos modelos no se encuentra una relación entre los parámetros de no-conmutatividad entre coordenadas y entre momentos, sino que ambos juegan un rol similar. Además, como los espacios de representación de las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2, \mathbb{R})$ pueden ser realizados en términos de funciones de cuadrado integrable de una variable, se concluye que estos sistemas son equivalentes a modelos cuánticos de partículas que viven en un espacio con una dimensión compacta adicional.