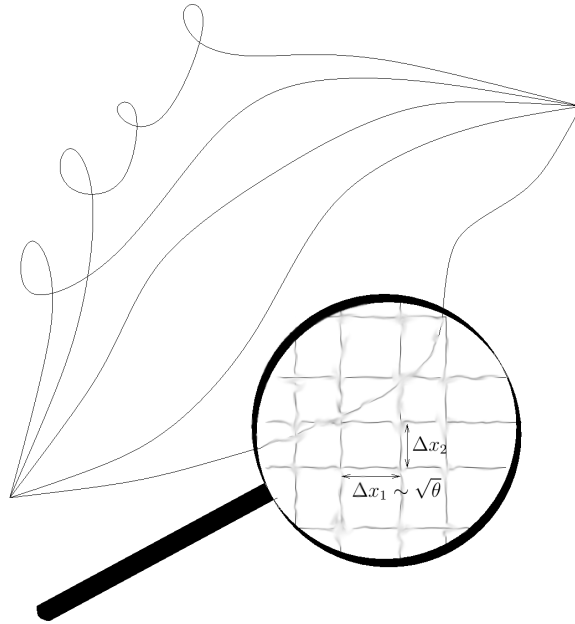


Formalismo de Línea de Mundo en Teorías No Conmutativas



S.A. FRANCHINO VIÑAS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Física

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Formalismo de Línea de Mundo
en
Teorías No Conmutativas

Sebastián A. FRANCHINO VIÑAS
Director: Prof. Dr. Pablo A. GONZÁLEZ PISANI.
Codirector: Prof. Dr. Horacio A. FALOMIR.

28 de Junio del 2015

Tesis para optar al grado de

Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas

de la Universidad Nacional de La Plata.

Autor:

Lic. Sebastián A. FRANCHINO VIÑAS.

Director:

Prof. Dr. Pablo A. GONZÁLEZ PISANI.

Codirector:

Prof. Dr. Horacio A. FALOMIR.

Lugar de Trabajo:

Instituto de Física La Plata, CONICET y
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional de La Plata.

Miembros del Jurado Evaluador:

Prof. Dr. Jurado UNO

Prof. Dr. Jurado DOS

Prof. Dr. Jurado TRES

Este trabajo fue financiado por una beca de posgrado del CONICET.

*A quienes han convergido en nuestra
sangre, y a los que ésta engendrará.*

*Io cominciai: «Poeta che mi guidi,
guarda la mia virtù sell è possente,
prima che lalto passo tu mi fidi (...)»*

*«(...) Or va chun sol volere è dambedue:
tu duca, tu signore e tu maestro».
Così li dissi; e poi che mosso fue,
intraì per lo cammino alto e silvestro.*

DANTE ALIGHIERI,
La Divina Commedia, Inferno Canto II.

Índice

Resumen	7
Lista de Abreviaturas	9
Capítulo 1. Introducción	11
1.1. Sobre el problema de la gravitación cuántica	11
1.2. Breve reseña histórica de la teoría cuántica de campos no conmutativa	13
1.3. Formalismo de Línea de Mundo	18
1.4. Objetivos y estructura de esta tesis	20
Capítulo 2. Aspectos generales de teoría cuántica de campos	23
2.1. La acción efectiva	24
2.2. Desarrollo perturbativo de la acción efectiva	25
2.3. Sobre la renormalización	29
2.4. El efecto Casimir	33
2.4.1. La energía efectiva	36
Anexos	39
2.A. Relación entre la renormalización <i>alla</i> zeta y <i>alla</i> núcleo de calor	39
Capítulo 3. Sobre las funciones espectrales	43
3.1. Nociones generales sobre operadores diferenciales	44
3.2. El núcleo de calor	47
3.2.1. El núcleo de calor para operadores generalizados de Laplace	49
Anexos	51
3.A. Cálculo de los primeros coeficientes de Seeley-DeWitt para la variedad de base \mathbb{R}^d	51
Capítulo 4. Formalismo de línea de mundo	53
4.1. Formalismo de línea de mundo para campos escalares	54
4.2. Coeficientes de Seeley-DeWitt para un potencial regular	56
4.3. Renormalización a un bucle del modelo $\lambda\varphi^4$	61

4.4. Núcleo de calor para un potencial tipo delta de Dirac	64
4.4.1. Fuerza de Casimir para condiciones de borde semitransparentes	68
Capítulo 5. Formalismo de línea de mundo en la teoría cuántica de campos no conmutativa	73
5.1. Teoría cuántica de campos no conmutativa en el espaciotiempo euclídeo Moyal	74
5.1.1. Modelo $\lambda\phi_\star^3$ en el espaciotiempo euclídeo Moyal	78
5.2. Integrales de camino en el espacio de fases	79
5.3. La funcional generatriz en el espacio de fases	83
5.4. Formalismo de línea de mundo en el espacio de fases	84
5.4.1. Caso conmutativo	86
5.4.2. Caso no conmutativo con $\bar{\Theta} = 0$	87
5.4.3. Caso con todos los productos Moyal a izquierda (o a derecha).	88
5.4.4. Caso general	89
5.5. Toro no conmutativo	90
5.6. Modelo $\lambda\varphi_\star^4$	92
Anexos	97
5.A. Teoría cuántica de campos no conmutativa con potenciales centrales	97
5.B. El disco no conmutativo	99
5.B.1. Energía de Casimir para el disco no conmutativo	101
Capítulo 6. El modelo de Grosse-Wulkenhaar	103
6.1. Definición del modelo de Grosse-Wulkenhaar	104
6.2. Núcleo de calor de operadores con un término armónico	105
6.3. FLM en el modelo de Grosse-Wulkenhaar	110
6.3.1. La función de dos puntos	111
6.3.2. La función de cuatro puntos	116
6.4. Análisis para una matriz de no conmutatividad degenerada	120
6.4.1. Contribuciones planares	123
6.4.2. Contribuciones no planares	124
6.5. Anisotropía en el término armónico	125
Anexos	129
6.A. El núcleo de Mehler	129
6.B. Sobre las condiciones de contorno en las integrales de camino para el modelo Grosse-Wulkenhaar	131
6.C. El polo de Landau y el modelo de Grosse-Wulkenhaar al orden de un bucle	135

ÍNDICE

9

Capítulo 7. Conclusiones

139

7.1. Trabajo a futuro

142

Agradecimientos

145

Bibliografía

147

Resumen

La unificación de las fuerzas descritas en el modelo estándar y gravitatoria en una teoría de la gravedad cuántica es quizás el problema más importante, desde el punto de vista teórico, a resolver por la física actual. La teoría cuántica de campos (TCC) no conmutativa (NC) se ha establecido en los últimos años como un posible modelo efectivo de la gravedad cuántica debido, fundamentalmente, a las benignas propiedades de renormalización que han demostrado tener algunos modelos dentro de este marco.

El objetivo de esta tesis es la implementación de las técnicas del formalismo de línea de mundo (FLM), las cuales ya han demostrado su eficacia en el estudio de las TCC usuales, al cálculo de cantidades a un bucle de diversos modelos de TCC NC. El principal resultado consiste en el análisis a un bucle del modelo de Grosse-Wulkenhaar utilizando el FLM. Asimismo, mostramos cómo adaptar el FLM a modelos no conmutativos de campos escalares autointeractantes en el plano Moyal. En el camino de esta adaptación, encontramos los desarrollos (para tiempo propio pequeño) del núcleo de calor de operadores con potenciales singulares y no locales; estos resultan de interés tanto por su posible aplicación física como por su contenido matemático.

Lista de Abreviaturas

AE	Acción Efectiva.
ET	Espaciotiempo.
FE	Funciones espectrales.
FG	Funcional Generatriz.
FLM	Formalismo de Línea de Mundo, del inglés <i>Worldline Formalism</i> .
IdC	Integral de Camino.
IR	Infrarrojo.
GW	Grosse-Wulkenhaar, en referencia al modelo.
LS	Langmann-Szabo, en referencia a la simetría.
NC	No Conmutativo/a/os/as.
NdC	Núcleo de Calor, del inglés, <i>Heatkernel</i> .
QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i> , en inglés, Cromodinámica Cuántica.
QED	<i>Quantum Electrodynamics</i> , en inglés, Electrodinámica Cuántica.
SDW	Seeley-DeWitt, en referencia a los coeficientes.
TCC	Teoría Cuántica de Campos.
t.f.	Términos finitos.
UV	Ultravioleta.

CAPÍTULO 1

Introducción

(...) daß die Quantentheorie nicht nur die Maxwellsche Electrodynamik, sondern auch die neue Gravitationstheorie wird modifizieren müssen.

– A. EINSTEIN, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation* (1916).

1.1. Sobre el problema de la gravitación cuántica

La física del siglo XX estuvo marcada por el triunfo de dos revolucionarias teorías, a decir, aquellas anunciadas por las dos pequeñas nubes que Lord Kelvin, en un discurso de 1900, veía en el diáfano cielo de la física¹: la relatividad general y la teoría cuántica de campos (TCC).

El modelo estándar, una TCC, ha sido más que exitoso en la descripción de fenómenos microscópicos que involucran la física de partículas y en los cuales los efectos gravitatorios pueden despreciarse. Para ello, como es sabido, fue necesario lidiar con los infinitos que plagaban la teoría y parecían tornarla inutilizable. Como arquetipo de este éxito suele tomarse la precisa determinación de la inversa de la constante de estructura fina α ; como se explica en Peskin y Schroeder (1995, págs. 196–198) esta determinación involucra cálculos a un orden de cuatro bucles en la teoría de la electrodinámica cuántica (QED), y experimentos que se basan en estudiar, entre otras cantidades, el momento magnético anómalo del electrón ($\alpha^{-1} = 137,035\,992\,35_{73}$), la estructura hiperfina del muonio ($\alpha^{-1} = 137,035\,994_{18}$) o el efecto Hall cuántico ($\alpha^{-1} = 137,035\,997\,9_{32}$). Por más que una indeterminación de menos de una parte en mil millones parecería definitiva, la comunidad continúa

¹Lord Kelvin hacía referencia a dos fenómenos físicos que eran por ese entonces incomprensibles: la dependencia del calor específico de gases y sólidos con la temperatura, y los resultados del experimento de Michelson-Morley que refutaban la existencia del éter.

hoy en día intentando correr los límites tanto en los cálculos como en las mediciones (Aoyama *et al.* 2015).

En el otro extremo, la teoría general de la relatividad ha demostrado su validez explicando la física de los grandes cuerpos, para los cuales las propiedades cuánticas pueden ser dejadas de lado. Ha descrito los ya clásicos fenómenos de precesión del perihelio de mercurio y de deflexión de la luz por el sol, y ha superado su puesta a prueba por modernos experimentos sobre el retardo en el tiempo de viaje de la luz (Bertotti *et al.* 2003) o el efecto geodético (Everitt *et al.* 2011).

Vale entonces preguntarse: ¿qué es lo que sucede cuando ninguna de las dos teorías puede ser obviada? Simplemente... no lo sabemos. Para colmo de males, parecería ser que no poseemos a disposición datos experimentales de una tal situación. Esto ha motivado a algunos investigadores a sugerir que este problema, el cual llamaremos de la gravedad cuántica, es un problema más adecuado al campo de la filosofía que al de la física.

Tenemos empero una certeza: no podríamos explicar esos fenómenos utilizando las actuales teorías. No tenemos la más remota idea de qué sucedería al hacer colisionar dos partículas con energías del orden de la escala de energía de Planck² $E_P = \sqrt{\frac{c^5 \hbar}{G}} \sim 10^{28} \text{ eV}$. Por separado, las dos teorías arrojan resultados incongruentes. Lo que es peor aún, al intentar vincularlas se encuentran inconsistencias lógicas o matemáticas que nos previenen de realizar predicciones cuantitativas. Esto era de esperarse desde el momento en que uno comprende cómo se construye el espaciotiempo (ET) en ambas teorías: en TCC un punto puede localizarse sólo utilizando una partícula de prueba de masa infinita (Salecker y Wigner 1958), mientras que en relatividad general se precisa de partículas de masa nula.

En todo caso, queda en claro que estas teorías tienen cierto rango de validez, relacionado con la energía E de los elementos a estudiar. ¿Será que existe una teoría que engloba ambas, y que en el límite adecuado (tal vez $E \ll E_P$) se reduce a ellas? Entre las diversas opciones que ofrece la física actual, la teoría de cuerdas es la más aceptada por la comunidad científica como posible teoría del todo. Allende las discusiones sobre su poder predictivo y dos novedosas características aún no observadas (la supersimetría y las seis dimensiones adicionales al ET), es cierto que el cálculo de cantidades físicas involucra un pesado formalismo matemático.

²La energía de Planck es aquella única que se obtiene a partir de las constantes fundamentales de ambas teorías: la velocidad de la luz en el vacío c , la constante de Planck reducida \hbar y la constante de gravitación universal de Newton G .

En estas condiciones, seguramente será de ayuda disponer de otros modelos que, conservando la base de las teorías de cuerdas, simplifiquen la obtención de resultados numéricos. En búsqueda de estas nuevas alternativas es plausible suponer que, vista la estrecha relación entre la gravedad y la geometría, una teoría de la gravedad cuántica debe introducir una cuantización del espacio ordinario. En otras palabras, es de esperar que el álgebra de las coordenadas se torne no conmutativo (NC).

1.2. Breve reseña histórica de la teoría cuántica de campos no conmutativa

La primera referencia que encontramos acerca de la partición del espacio en celdas se remonta a 1930 y corresponde a Heisenberg (1930), quien busca una forma de regularizar las divergencias en la autoenergía del electrón. En cambio, debemos transportarnos hasta los últimos años de la década de 1940 para dar con el pionero en la construcción de una TCC sobre un ET NC, Snyder (1947b). En su trabajo, contemporáneo y rival de la incipiente renormalización perturbativa de Tomonaga, Schwinger, Feynman y Dyson (1949), abriga la esperanza de que la longitud mínima ℓ , inducida en el espacio por la no conmutatividad de las coordenadas, podría funcionar también como un parámetro regulador de divergencias, en este caso las ultravioletas (UV) de las TCC.

Para comprender esa idea, tomemos como ejemplo la teoría $\lambda\phi^4$ definida sobre un ET euclídeo. La predicción de magnitudes observables implica, al orden de un bucle, el cálculo de las contribuciones de los diagramas tipo renacuajo y tipo pez, las cuales son respectivamente

$$(I.2.1) \quad \begin{aligned} & \text{Diagrama tipo renacuajo} \propto \int d^4p \frac{1}{p^2 + m^2}, \\ & \text{Diagrama tipo pez} \propto \int d^4p \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p - q)^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Estas integrales sobre todo el espacio son ciertamente divergentes, debido al comportamiento de los integrandos para grandes valores del impulso (región UV). Sin embargo, si la integración fuera limitada, digamos, a la región $p^2 < \Lambda^2 \sim \ell^{-2}$, la integral resultaría convergente.

Pese a los esfuerzos de Snyder (1947a) por obtener una teoría del campo electromagnético en un espacio NC, la idea no tuvo en la comunidad física la repercusión de la que sí gozó la teoría de renormalización perturbativa. No fue sino hasta los últimos años de la década de 1980 que las semillas sembradas por Snyder finalmente germinaron. En esos años, luego de varios trabajos que dieron lugar a la formalización matemática de la rama que dio a llamarse geometría no conmutativa (Connes 1994), Dubois-Violette *et al.* (1990) propusieron utilizar este formalismo para estudiar teorías de campos clásicos de gauge; poco después, la aplicación al modelo standard fue analizada por Connes y Lott (1991). En su forma final (Chamseddine y Connes 1997, Connes 2006), la idea corresponde a estudiar la traza de cierto operador de Dirac sobre una geometría no conmutativa, que conduce tanto a la parte fermiónica como bosónica de la acción clásica del modelo estándar.

Casi a la par, en 1990, Filk (1990) comenzó a examinar el desarrollo perturbativo de un modelo de TCC NC para un campo escalar auto-interactuante sobre el plano no conmutativo. La formulación en este espacio, definido por la relación de conmutación

$$i [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 2 \Theta^{\mu\nu} \in \mathbb{R}$$

entre los operadores coordenada, supuso dos avances:

- 1) existe una correspondencia unívoca entre el álgebra de funciones de operadores posición con el cual trabaja y el álgebra de funciones con un producto no conmutativo (Moyal o \star), el cual a fines prácticos suele definirse en la forma

$$(I.2.2) \quad (f \star g)(x) := e^{-i \partial_\mu^f \Theta^{\mu\nu} \partial_\nu^g} f(x)g(x),$$

donde ∂_μ^f representa el operador ∂_μ que actúa sobre $f(x)$. Este hecho había sido ya apreciado por Groenewold (1946) y Moyal (1949), quienes inspeccionaron la analogía, propuesta por Weyl (1927) y Wigner (1932), entre una teoría estadística sobre el espacio de fases y la mecánica cuántica usual³. En otras palabras, esta correspondencia significa que, a través de un mapeo entre operadores y funciones, multiplicar funciones de operadores es idéntico a utilizar el producto Moyal (\star) entre funciones de variable real y evaluar el resultado en los operadores

$$(I.2.3) \quad f(\hat{x}) \cdot g(\hat{x}) = (f \star g)(\hat{x});$$

³La conexión entre la mecánica cuántica usual en una dimensión y el plano no conmutativo es evidente luego de observar los conmutadores involucrados.

- 2) en el espacio dual a las coordenadas (en el sentido de Fourier), el producto Moyal se reduce a la introducción de una fase $e^{i \sum_{\mu, \nu} p_{\mu} \Theta^{\mu\nu} p_{\nu}}$ en las reglas de Feynman para el vértice, donde p_{μ} son los momentos asociados a las patas de dicho vértice. Como consecuencia, surgen a nivel diagramático dos grupos: el de los diagramas planares y el de aquellos no planares. Para los primeros, las fases ligadas a momentos internos se cancelan y la estructura de divergencias de la contribución es idéntica a la de los diagramas de la teoría conmutativa subyacente ($\Theta^{\mu\nu} = 0$). Para una teoría $\lambda\phi_{\star}^4$, este es el caso de los diagramas de la ecuación (I.2.1). Los no planares, en cambio, poseen una fase que alentadoramente los vuelve más convergentes. Un ejemplo, siempre en la teoría $\lambda\phi_{\star}^4$, es el diagrama de la Figura 1; a causa del ordenamiento de las patas resulta diverso al diagrama de renacuajo usual.



FIGURA 1. Diagrama de renacuajo no planar.

A mediados de la década de 1990 una serie de trabajos hizo hincapié en los problemas de colapso gravitacional que surgen en un proceso ideal de medición de coordenadas al intentar conjugar la TCC y la relatividad general (Ahluwalia 1994, Doplicher *et al.* 1995). Su punto de vista novedoso consistió en explotar estos inconvenientes para motivar relaciones de incerteza entre las coordenadas, requiriendo justamente que un proceso de medición no pueda derivar en la creación de un agujero negro. Esto correspondía a seguir un camino en cierto sentido contrario al que era utilizado en ese momento, visto que eran las teorías propuestas de gravedad cuántica las que sugerían un comportamiento granular a altas energías (Ashtekar 1993).

Por otro lado, luego de un lustro Seiberg y Witten (1999) mostraron que ciertas teorías cuerdas se reducen a TCC NC en cierto régimen de bajas energías, reforzando la idea esbozada en la sección anterior de que podrían ser utilizadas para estudiar (fenomenológicamente) la gravedad cuántica. Como respuesta a este resultado, se generó una oleada

de publicaciones sobre el tema; tan solo unos pocos meses después, apareció entre ellas una con un resultado sumamente desesperanzador: las TCC NC, en vez de curar las divergencias usuales, padecían de un nuevo inconveniente llamado mezcla ultravioleta-infrarroja (UV-IR) (Minwalla *et al.* 2000). Si bien los diagramas que muestran este comportamiento son divergentes UV en la teoría conmutativa y se vuelven convergentes UV en la teoría NC, su inclusión en diagramas de orden mayor genera divergencias IR que parecieran ser no renormalizables.

El punto crucial para solucionar este problema, de acuerdo a Grosse y Wulkenhaar (GW), fue el análisis de las simetrías clásicas del potencial $\lambda\phi^4$ (Grosse y Wulkenhaar 2005). En efecto, este potencial resulta invariante frente a las transformaciones de dualidad de Langmann-Szabo (LS), mediante las cuales coordenadas y momentos son intercambiados (Langmann y R. J. Szabo 2002). Con este argumento fundamentaron que la función de dos puntos posiblemente tendría contribuciones divergentes que respetaban dicha dualidad; ergo, para que el modelo resultara renormalizable el propagador también debía respetar esa simetría. La solución más simple, correspondiente a agregar un potencial armónico a los términos del lagrangiano, fue la adoptada por GW. En este caso, la originalidad de GW corresponde no tanto a la introducción de este término armónico, cuyo surgimiento se podía vislumbrar en el trabajo de Kempf (1994), sino a la demostración de la renormalizabilidad perturbativa del modelo a todo orden.

Desde entonces, el modelo de GW se ha mostrado poseedor de ciertas propiedades más que interesantes. Comencemos mencionando que, a diferencia de lo que parece ocurrir para el modelo conmutativo $\lambda\phi^4$, no sufre del problema del polo de Landau. Este inconveniente, que afecta también a la QED (Landau *et al.* 1956) y puso en jaque a las TCC promediando la década de 1950, puede ser planteado de la siguiente manera: la constante de acoplamiento desnuda λ , aquella con la cual se comienza el proceso de renormalización, adquiere una dependencia en la constante renormalizada λ_R , un parámetro medible, y la escala de energía asociada a un parámetro de corte Λ . Verbigracia, luego de resolver las ecuaciones del grupo de renormalización a orden dominante en el desarrollo perturbativo del modelo $\lambda\phi^4$ en un ET de dimensión cuatro, se encuentra que

$$(I.2.4) \quad \lambda = \frac{\lambda_R}{1 - \beta_2 \lambda_R \log(\frac{\Lambda}{m})},$$

donde $\beta_2 > 0$ es una constante que depende de la teoría en cuestión⁴. Para $\lambda_R > 0$, al incrementar el valor del parámetro de corte nos encontramos con un valor para el cual la constante λ diverge; dado que para obtener esta fórmula se había supuesto la pequeñez de la constante λ a fin de obtener desarrollos perturbativos, el modelo resulta inconsistente. Esto sucede siempre y cuando $\lambda_R \neq 0$; caso contrario, logramos eliminar el polo y eludir la divergencia a fuerza de obtener una constante de acoplamiento λ_R idénticamente nula, a saber, la teoría de un campo libre. Esto suele ligarse al fenómeno de trivialidad, equivalente a la anulación de las funciones de más de dos puntos de la teoría o a su posible descripción en términos de campos libres. Ha sido demostrado que dicha trivialización acaece para el modelo $\lambda\phi^4$ en dimensiones $d > 4$ (Aizenman 1981), mientras que algunos estudios analíticos (Frohlich 1982) y numéricos (Suslov 2008, Wolff 2009) sugieren lo mismo para $d = 4$.

Una forma elegante de salvar estas dificultades resultó ser, para muchos, el descubrimiento de la libertad asintótica para las teorías de Yang-Mills en la década de 1970 (Gross y Wilczek 1973, Politzer 1973, 't Hooft y Veltman 1972). El modelo de GW, como hemos dicho previamente, burla el problema del polo de Landau, pero no exhibiendo una libertad asintótica. A fines del 2006, Disertori, Gurau *et al.* (2007) analizaron el flujo del grupo de renormalización utilizando una identidad similar a la de Ward en QED. Sorpresivamente, aunque no tanto dados los resultados previos al orden de uno y tres bucles (Disertori y Rivasseau 2007, Grosse y Wulkenhaar 2004), la función beta se anulaba a todo orden perturbativo en el punto autodual de LS y demostraban así que la constante de acoplamiento poseía una cota superior: el modelo estaba en consecuencia dotado de lo que se denomina seguridad asintótica.

Recientemente Grosse y Wulkenhaar (2014a) han demostrado que cierto límite altamente no conmutativo de su modelo puede ser resuelto, es decir, es posible conocer todas las funciones de correlación, cuanto menos formalmente. Además, estos resultados permiten analizar el modelo de GW en el marco de las TCC constructivas, teorías que surgieron a mediados del siglo XX como respuesta a la falta de rigurosidad matemática que aquejaba a las TCC, proponiendo una formulación axiomática de estas últimas basada en principios físicos cuestionables, ya sea en el espacio minkowskiano (Wightman 1956) o

⁴En QED se observa un comportamiento análogo identificando la constante de acoplamiento con el cuadrado de la carga del electrón.

euclídeo (J. Schwinger 1959). Los indicios expuestos al respecto en las publicaciones de Grosse y Wulkenhaar (2013, 2014b) son promitentes.

Para finalizar, no debemos olvidar referirnos a las posibles evidencias experimentales. Aseverar que no disponemos de datos experimentales para evaluar la validez de las teorías no conmutativas nos parece apresurado. Es probable que la posibilidad de falsar estas teorías esté más cerca de lo que intuimos (Amelino-Camelia 2013). Esté de acuerdo o no con esta afirmación, acompañenos en el siguiente razonamiento: consideremos rayos cósmicos de protones ultra energéticos, con energías $E \sim 10^{20}$ eV. Coincidimos en que $\frac{E}{E_p} \sim 10^{-8}$, lo cual sugiere dificultades para detectar posibles desviaciones de los datos respecto a los de un modelo conmutativo. Sin embargo, ¿qué impide que eventualmente las correcciones puedan involucrar la masa m_p del protón, ser de la forma $\frac{E^2}{E_p m_p} \sim 10^3$ y quizás observables?

1.3. Formalismo de Línea de Mundo

Los métodos funcionales han demostrado su potencialidad desde la concepción de las integrales de camino por parte de R. Feynman. R. P. Feynman (1948). Basta, por ejemplo, notar la simpleza y claridad que goza la rederivación de las reglas de Feynman a través de estas técnicas. Sin lugar a dudas, uno de sus principales sucesos ha sido en el marco de las teorías de Yang-Mills, donde permite implementar elegantemente la invarianza de gauge en el cálculo perturbativo de diversas cantidades (diagramas de Feynman, identidades de Slavnov-Taylor, etc.).

No obstante, su éxito no se reduce a la obtención de resultados perturbativos, sino que resulta fundamental en el análisis de cantidades no perturbativas. Podemos citar como ejemplo el estudio de solitones e instantones (Shifman y Vainshtein 1999, 't Hooft 1976a,b), o de teorías de gauge supersimétricas no abelianas (Vandoren y van Nieuwenhuizen 2008). Para no correr el riesgo de aburrir al lector a través de una larga enumeración de aplicaciones que van incluso más allá del campo de la física, lo remitimos a la bibliografía especializada (Bastianelli y van Nieuwenhuizen 2006, Kleinert 2004).

Por su parte, el formalismo de línea de mundo (FLM) es un método que involucra el cálculo de integrales funcionales en mecánica cuántica para el cálculo de cantidades en TCC (Schubert 2001). En consecuencia, esta técnica hereda las bondades conceptuales y prácticas de los métodos funcionales.

Al rastrear los usos del FLM podemos llegar hasta el trabajo de R. Feynman (1950), en cuyo apéndice se ve un atisbo de la técnica: utilizó integrales de camino en la primera cuantización como método para

encontrar soluciones de la ecuación de Klein-Gordon. A nuestro entender, la primera aplicación del FLM propiamente dicho corresponde al estudio de la producción de pares electrón-positrón ante la presencia de campos eléctricos externos pequeños (Affleck *et al.* 1982). Cerca en el tiempo, Alvarez-Gaume y Witten (1984) consideraron dos partículas, una bosónica y una fermiónica, para calcular anomalías gravitacionales en teorías de campos fermiónicos en interacción con un campo gravitatorio débil.

Más adelante, técnicas inspiradas en integrales funcionales sobre hojas de mundo en teorías de cuerdas fueron utilizadas por Bern y Kosower (1988, 1992), con el objeto de calcular correcciones de un bucle a acciones efectivas de campos escalares en presencia de campos de gauge de fondo. Estos resultados fueron luego elegantemente derivados por Strassler (1992) en términos de integrales de camino para partículas, a saber lo que hoy en día conocemos como FLM.

Entre las diversas aplicaciones exitosas del FLM que desde entonces se han realizado, podemos mencionar su uso al análisis, al orden de un bucle, del acoplamiento de un fondo gravitacional externo con campos cuánticos de diverso spin (Bastianelli, Benincasa *et al.* 2005, Bastianelli, Corradini y Latini 2007, 2008, Bastianelli, Corradini y Zirotti 2003, Bastianelli y Schubert 2005, Bastianelli y Zirotti 2002) y campos escalares en variedades chatas con borde (Bastianelli *et al.* 2009, Bastianelli, Corradini y P. A. G. Pisani 2007, 2008, Bastianelli *et al.* 2008); a ordenes superiores en el número de bucles ha permitido el estudio de teorías escalares (Sato y Schmidt 1999), espinores en QED (Schubert 1996) y teorías de Yang-Mills (Sato 1999). Siempre en el marco de QCD, resulta de gran ayuda, por ejemplo, al realizar cálculos de amplitudes con n fotones o gluones (Ahmadinia *et al.* 2013).

Asimismo, cabe destacar que las integrales de camino resultan apropiadas para la realización de simulaciones computacionales de modelos de TCC, tomando o no un ET discretizado (Dunne, Gies *et al.* 2009). Combinadas con los métodos de Monte Carlo en lo que ha recibido el nombre de *worldline numerics*, ha posibilitado el cálculo de energías de Casimir en diversas geometrías y el estudio de su dependencia con la temperatura (Gies y Klingmuller 2006a,b,c, Gies, Langfeld *et al.* 2003, Klingmuller y Gies 2008, Weber y Gies 2010a,b), como así también el de la producción de pares ante la presencia de campos electromagnéticos (Gies y Klingmuller 2005). Al encarar este último problema, Dunne y Schubert (2006) mostraron la posibilidad de realizar cálculos analíticos no perturbativos considerando instantones en la línea de mundo.

1.4. Objetivos y estructura de esta tesis

Hemos ya planteado algunos de los problemas que surgen al intentar formular una teoría de la gravedad cuántica y sugerido que su abordaje desde una posible teoría efectiva, la TCC NC, puede resultar de ayuda. El propósito global de la presente tesis es entonces abordar ciertos modelos de TCC NC a través del prisma del FLM, con el objeto de calcular diversas cantidades físicas al orden de un bucle; como se podrá observar de los resultados, la eficiencia que los métodos funcionales ofrecen en la TCC usual se conserva en el caso NC. La comparación de este tipo de correcciones con datos experimentales podría llevar luego a acotar los parámetros de no conmutatividad $\Theta^{\mu\nu}$. Pasemos ahora a detallar la estructura de esta tesis, desglosando los objetivos particulares de cada capítulo.

En el capítulo 2 introducimos conceptos y cantidades básicas de TCC. Este capítulo está concebido no para ofrecer un tratamiento acabado del tema (que el lector puede encontrar refiriéndose a la rica literatura existente) sino como un resumen que, actuando a modo de recordatorio y fijando notaciones a través de ejemplos, dote de cierto grado de independencia a la tesis. De este modo introducimos someramente las cantidades y técnicas que serán de interés en nuestros cálculos posteriores: la acción efectiva (escrita perturbativamente en término de funciones espectrales), la técnica de renormalización y la energía de Casimir.

En el decurso de ese capítulo se puede adivinar el rol primordial que tienen las funciones espectrales (FE), en especial el núcleo de calor (NdC), en el desarrollo de este trabajo. Por este motivo, creemos conveniente realizar una exposición formal de las mismas en el capítulo 3, evitando demostraciones que podrían desviar la atención de los objetivos de la tesis.

Más adelante, en el capítulo 4, presentamos el FLM para el caso más sencillo, el de un campo cuántico escalar autointeractuante. Como resultado intermedio obtenemos el desarrollo asintótico, para tiempo propio pequeño, del NdC del operador de fluctuaciones cuánticas, suponiendo ciertas condiciones de regularidad sobre el potencial. A modo de ejemplo, computamos al orden de un bucle la acción efectiva del modelo $\lambda\phi^4$, para luego analizar su renormalización a idéntico orden. En forma suplementaria y finalizando este capítulo dedicado a las teorías conmutativas, consideramos un modelo con un potencial delta de Dirac de fondo; para este potencial singular, mostramos como calcular la energía efectiva. Estos últimos resultados, de interés en diversos

modelos que proponen densidades de carga localizadas en superficies, corresponden al trabajo de Franchino Viñas y P. A. G. Pisani (2011).

El capítulo 5 está dedicado a la generalización del FLM a TCC NC en las cuales la no conmutatividad entre las coordenadas está dada por parámetros constantes. Una vez hecho un breve comentario sobre como implementar la no conmutatividad haciendo uso del producto Moyal, el modelo $\lambda\phi_\star^3$ muestra como novedad que el operador de fluctuaciones cuánticas puede poseer potenciales no locales. La clave en nuestra implementación del FLM es, como era de esperar a partir del álgebra de operadores posición y momento, trabajar con integrales de camino en el espacio de fases. El resultado principal, contenido en el trabajo publicado en conjunto con Bonezzi *et al.* (2012), es una fórmula maestra para el desarrollo, a tiempo propio pequeño, del NdC de operadores con potenciales no locales. Además, tomamos diversos modelos no conmutativos para ejemplificar las peculiaridades que en general ofrecen; entre ellos, el modelo del disco no conmutativo, estudiado junto a Falomir, Franchino Viñas *et al.* (2013).

Prosiguiendo con el estudio de las TCC NC, el capítulo 6 detalla la aplicación del FLM al modelo de GW. En este caso, el potencial de fondo armónico sugiere una ligera adaptación de las técnicas del capítulo previo; una vez realizados esos retoques, el estudio de la renormalización del modelo al orden de un bucle es inmediato. Dos casos especiales, el de la no conmutatividad degenerada y el del oscilador anisotrópico, merecen particular atención. Este capítulo está basado en el trabajo realizado por Franchino Viñas y P. A. G. Pisani (2014).

Por último, el capítulo 7 contiene las conclusiones de este trabajo y ciertas ideas que, habiendo quedado parcial o totalmente en el tintero, podrían dar frutos en un futuro cercano.

A modo de resumen, enumeramos a continuación la lista de las publicaciones que contienen los resultados originales de esta tesis:

- S. A. Franchino Viñas and P. A. G. Pisani, “Semi-transparent Boundary Conditions in the Worldline Formalism,” *J. Phys. A* **44** (2011) 295401 [arXiv:1012.2883 [hep-th]].
- R. Bonezzi, O. Corradini, S. A. Franchino Viñas and P. A. G. Pisani, “Worldline approach to noncommutative field theory,” *J. Phys. A* **45** (2012) 405401 [arXiv:1204.1013 [hep-th]].
- H. Falomir, S. A. Franchino Viñas, P. A. G. Pisani and F. Vega, “Boundaries in the Moyal plane,” *JHEP* **1312** (2013) 024

[arXiv:1307.4464 [hep-th]].

- S. Franchino Viñas and P. Pisani, “Worldline approach to the Grosse-Wulkenhaar model,” JHEP **1411** (2014) 087 [arXiv:1406.7336 [hep-th]].

A esta lista corresponde agregar dos trabajos relacionados que se encuentran actualmente en preparación:

- S. Franchino Viñas y P. Pisani, “Thermodynamics in the Non-commutative Disc”;
- S. Franchino Viñas y P. Pisani, “Zeta function and Casimir energy for two parallel plates in Euclidean Moyal Space”.

CAPÍTULO 2

Aspectos generales de teoría cuántica de campos

Al mismo río entras y no entras, pues eres y no eres.

– HERÁCLITO.

Tal como hemos explicado en la Introducción, esta tesis se propone el estudio de un tipo particular de TCC: el de las teorías NC. Las cantidades que habremos de calcular, no obstante poseerán ciertas peculiaridades inherentes a la no conmutatividad, han sido definidas en general para cualquier TCC. En esta sección intentaremos proveer de un breve resumen o ayuda memoria que facilite la lectura del resto del trabajo.

Primero y principal, introduciremos el concepto de acción efectiva (AE), la contraparte cuántica de la acción a nivel clásico. Prácticamente sin riesgo a equivocarnos, podemos aseverar que esa fue su razón de ser: construir una cantidad que poseyendo toda la información cuántica del modelo responda a los principios variacionales típicos de la formulación clásica. La acción efectiva, concebida como una funcional del valor de expectación de vacío del campo cuántico, no es más que una modificación de la acción clásica, en el sentido que contiene las correcciones necesarias de los diagramas de Feynman de la teoría y que su mínimo variacional corresponde al valor de expectación del campo en el estado de vacío. Por este motivo es usual emplear un desarrollo en potencias de \hbar para la acción efectiva, cuyo primer término corresponde justamente a la acción clásica. El segundo término puede ser escrito utilizando funciones espectrales (FE); a ellas dedicaremos el próximo capítulo. Orden a orden en \hbar , permite observar si las simetrías que poseía el sistema a nivel clásico se mantienen o son rotas por las correcciones cuánticas, dando lugar a las denominadas anomalías cuánticas.

Por cuanto al examinar los términos de dicho desarrollo nos encontramos con expresiones divergentes, nos es necesario presentar las ideas de regularización que permiten dar sentido físico a estas teorías. Veremos que las técnicas de renormalización, confirmadas a mediados

del siglo pasado por el éxito de la QED, son adaptables al estudio de la acción efectiva a través de FE.

Para finalizar, consideraremos el efecto Casimir, una manifestación observable de la energía de vacío que, como era de prever, precisa ser regularizada. Las aplicaciones de este fenómeno son diversas; desde el punto de vista de la física aplicada, su comprensión se ha vuelto vital desde la incursión tecnológica en la escala nanométrica.

2.1. La acción efectiva

Para definir la AE, consideraremos el ejemplo más simple. Tomemos un campo cuántico φ escalar y real sobre un espacio de base (digamos \mathbb{R}^d) descrito por la acción $S[\varphi]$; la función de partición $Z[J]$ y la funcional generatriz $W[J]$, son definidas de manera que dependen de la fuente clásica $J(x)$ a través de la integral funcional

$$(II.1.1) \quad Z[J] := e^{-\frac{1}{\hbar} W[J]} := \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi] + \frac{1}{\hbar} \int dx J\varphi}.$$

Aquellos no familiarizados con integrales de camino son referidos a Bastianelli y van Nieuwenhuizen (2006) y Kleinert (2004) para su tratamiento formal. A grandes rasgos, será suficiente su interpretación física como integral sobre todas las configuraciones del campo posibles en el espacio. La constante \mathcal{N} suele ser elegida de manera que¹ $Z[J = 0] = 1$:

$$(II.1.2) \quad \mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi]}.$$

Luego, introducimos el campo medio (o campo clásico) $\phi(x)$ en presencia de dicha fuente $J(x)$ a través de la relación

$$(II.1.3) \quad \begin{aligned} \phi(x) &:= \frac{\mathcal{N}}{Z[J]} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi] + \frac{1}{\hbar} \int J\varphi} \varphi(x) \\ &= -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \end{aligned}$$

Por este motivo se dice que los campos $J(x)$ y $\phi(x)$ son campos conjugados; además, esto nos permite considerar la transformada de Legendre de la funcional generatriz $W[J]$ en función del campo medio ϕ

$$(II.1.4) \quad \Gamma[\phi] := \left\{ W[J] + \int J\phi \right\}_{J=J[\phi]}.$$

¹Esta normalización implica que $Z[J]$ será la funcional generatriz de las funciones de Green de la teoría. A su vez, en términos de diagramas de Feynman sólo será necesario considerar aquellos que no tienen subdiagramas de vacío, i.e. no poseen subdiagramas sin patas externas.

La función $\Gamma[\phi]$, recibe el nombre de acción efectiva. Ciertamente, a partir de esta definición vale la igualdad

$$(II.1.5) \quad \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = J(x).$$

Al tomar $J(x) \equiv 0$ obtenemos el principio variacional al que hemos hecho referencia anteriormente. Adicionalmente, notemos que los valores de expectación de vacío² de productos del campo cuántico φ pueden escribirse en términos de derivadas funcionales de $Z[J]$ evaluadas en $J \equiv 0$:

$$(II.1.6) \quad \begin{aligned} \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle &:= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\varphi]} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \\ &= \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J \equiv 0}. \end{aligned}$$

A partir de ellos, la fórmula de reducción de Lehmann *et al.* (1955) permite determinar las amplitudes de dispersión de cualquier proceso. Esto, sumado a las propiedades de la transformada de Legendre que permiten reescribir las derivadas de (II.1.6) en términos de derivadas funcionales de $\Gamma[\phi]$ respecto a la variable ϕ , implica que la información de todo proceso de dispersión está contenida en la AE.

En general obtener una expresión cerrada para la AE es una ardua tarea; en su lugar, demostraremos en la próxima sección cómo es más sencillo obtener un desarrollo en potencias de \hbar .

2.2. Desarrollo perturbativo de la acción efectiva

Hemos visto que la AE es la transformada de Legendre de la FG $W[J]$, mientras que en la definición de esta última entran en juego integrales funcionales de exponenciales. En base a esto, es de esperar que el método de descenso empinado permita obtener un desarrollo perturbativo de la AE. De acuerdo a este método, buscando el desarrollo en serie de potencias de $Z[J]$ conviene considerar la acción alrededor de la configuración clásica $\phi_0(x)$, definida como aquella que minimiza la acción $S[\phi]$; en otras palabras, $\phi_0(x)$ satisface la ecuación clásica de movimiento

$$(II.2.1) \quad \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}[\phi_0] = J(x).$$

En ausencia de fuentes externas, i.e. $J(x) = 0$, la configuración clásica minimiza la acción $S[\phi]$ mientras que el campo $\phi(x)$, que representa

²Estos valores de expectación de vacío corresponden a campos temporalmente ordenados.

el valor de expectación de vacío del campo, minimiza la funcional $\Gamma[\phi]$ (ver (II.1.5)). Como habíamos adelantado, la acción efectiva resulta contener, en este sentido, los efectos cuánticos del campo φ .

Retomando la definición original (II.1.1), realizamos la traslación del campo cuántico φ en una cantidad igual a la configuración clásica $\phi_0(x)$ para llegar a la expresión

$$(II.2.2) \quad Z[J] = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{\hbar} S[\phi_0] + \frac{1}{\hbar} \int J \phi_0} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} \int (\delta S_{\phi_0} - J) \varphi - \frac{1}{2\hbar} \iint \delta^2 S_{\phi_0} \varphi \varphi + \dots},$$

donde δS_{ϕ_0} denota la función obtenida como la derivada funcional $\delta S[\varphi]/\delta\varphi(x)$ evaluada en la configuración clásica $\phi_0(x)$. Análogamente, el núcleo $\delta^2 S_{\phi_0}$ es la variación segunda $\frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x')}$ evaluada en $\phi_0(x)$. Por fortuna, la traslación en los campos no introduce una modificación en la medida de integración de la integral funcional.

La ecuación (II.2.2) puede simplificarse recordando la definición (II.2.1) de la configuración clásica; más aún, cambiando la escala del campo³ $\varphi \rightarrow \sqrt{\hbar}\varphi$ se puede entrever que el método de descenso empinado coincide en este caso con un desarrollo en potencias de \hbar :

$$(II.2.3) \quad Z[J] = \mathcal{N}' e^{-\frac{1}{\hbar} S[\phi_0] + \frac{1}{\hbar} \int J \phi_0} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \iint \delta^2 S_{\phi_0} \varphi \varphi} e^{O(\sqrt{\hbar})}.$$

Justamente, el reescalo nos permite proponer, expandiendo el factor $e^{O(\sqrt{\hbar})}$ y teniendo en cuenta que el teorema de Wick constriñe los términos a poseer un número par de campos φ , un desarrollo perturbativo para $W[J]$ de la forma

$$(II.2.4) \quad W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n W_n[J].$$

Combinando las expresiones (II.1.1) y (II.2.3), es inmediato que el resultado al más bajo orden es la transformada de Legendre de la acción clásica,

$$(II.2.5) \quad W_0[J] = S[\phi_0(x)] - \int J(x)\phi_0(x).$$

³Esta transformación acarrea un jacobiano constante que se cancela al realizar idéntico cambio en los campos de la integral funcional que define la constante de normalización $\mathcal{N}'^{-1} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar} S[\sqrt{\hbar}\varphi]}$.

Por otra parte, la integral funcional de los términos cuadráticos en el campo φ da la siguiente contribución:

$$(II.2.6) \quad \begin{aligned} e^{-W_1[J]} &= \mathcal{N}'_0 \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \iint \varphi(x) \delta^2 S_{\phi_0} \varphi(x)} \\ &= \text{Det}^{-1/2} (G^{-1} A), \end{aligned}$$

donde A es el operador de fluctuaciones cuánticas definido a través del núcleo $\delta^2 S_{\phi_0}$, el operador G^{-1} es el inverso de $(-\partial^2 + m^2)$ y \mathcal{N}'_0 es la contribución a orden \hbar^0 de la constante de normalización \mathcal{N}' . En este punto es preciso realizar un par de comentarios. Primero, G tiene su origen en la elección realizada para \mathcal{N} , expresada en (II.1.2); un análisis perturbativo en \hbar para \mathcal{N}' demuestra la validez de (II.2.6). En forma concreta, estamos suponiendo que la acción consta únicamente de un término cinético, uno de masa y uno de potencial autointeractuante con potencias de φ mayores a tres:

$$(II.2.7) \quad S[\varphi] = \int \varphi (-\partial^2 + m^2) \varphi + V(\varphi).$$

Segundo, el determinante funcional $\text{Det}(X)$ está definido como el producto de los autovalores del operador X , a saber,

$$(II.2.8) \quad \text{Det}(X) := \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i,$$

siendo $\lambda_{i \in \mathbb{N}}$, los autovalores del operador X . El resultado (II.2.6) puede entenderse de la siguiente manera, suponiendo que el operador $\delta^2 S_{\phi_0}$ admite una base de autovectores $\psi_{i \in \mathbb{N}}$: todo campo puede expandirse en esta base como

$$(II.2.9) \quad \varphi(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \psi_i$$

y, por consiguiente, realizar la integral sobre toda configuración equivale a sumar las contribuciones de campos con componentes arbitrarias en la base elegida

$$(II.2.10) \quad \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \iint \varphi(x) \delta^2 S_{\phi_0} \varphi(x)} = \int \prod_{i=1}^{\infty} da_i e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2}.$$

Salvo para algunas excepciones en las que sólo hay un número finito de autofunciones o los autovalores tienden a acumularse alrededor de la unidad, el determinante funcional (II.2.8) es una expresión divergente; estas divergencias se corresponden con las que se educen haciendo uso de los diagramas de Feynman en un desarrollo perturbativo.

Dejando momentáneamente de lado esas divergencias, recordemos que para calcular la acción efectiva debemos primero obtener una expresión para el campo $\phi(x)$ conjugado a la fuente $J(x)$

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &= -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \\
 (II.2.11) \quad &= \phi_0(x) + \int \left\{ \frac{\delta S}{\delta \phi}[\phi_0] - J(x) \right\} \frac{\delta \phi_0}{\delta J(x)} + O(\hbar) \\
 &= \phi_0(x) + \delta\phi(x),
 \end{aligned}$$

con $\delta\phi(x)$ de orden \hbar , puesto que el término entre llaves es nulo para configuraciones clásicas.

Por su parte, tomando la definición (II.1.4) y utilizando la relación (II.2.11), la acción efectiva resulta

$$\begin{aligned}
 (II.2.12) \quad \Gamma[\phi] &= \left\{ S[\phi(x) - \delta\phi(x)] - \int J(x)(\phi(x) - \delta\phi(x)) \right. \\
 &\quad \left. - \hbar \log \text{Det}^{-1/2}(G^{-1}A) + O(\hbar^2) + \int J(x)\phi(x) \right\}_{J=J[\phi]} \\
 &= S[\phi(x)] - \int \left\{ \frac{\delta S}{\delta \phi}[\phi_0] - J[\phi_0] \right\} \delta\phi(x) \\
 &\quad - \hbar \log \text{Det}^{-1/2}(G^{-1}A) + O(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

En la última línea hemos utilizado el hecho que $\delta\phi$ es orden \hbar para reemplazar ϕ por la configuración clásica ϕ_0 en el término entre las llaves. Basta por último reconocer la ecuación de movimiento (II.2.1) de la configuración clásica en dicho término de (II.2.12) para obtener el desarrollo de la acción efectiva al orden de un bucle⁴

$$(II.2.13) \quad \Gamma[\phi] = S[\phi(x)] + \frac{\hbar}{2} \log \text{Det}(G^{-1}A) + O(\hbar^2).$$

Más aún, si acaso $B = G^{-1}A$ fuera una matriz diagonalizable con autovalores no nulos, podríamos utilizar las propiedades del logaritmo para escribir

$$\begin{aligned}
 (II.2.14) \quad \log \det B &= \log \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \\
 &= \text{tr} \log B,
 \end{aligned}$$

⁴Puede demostrarse que el desarrollo en potencias de \hbar corresponde diagramáticamente con el desarrollo en el número de bucles del diagrama.

llamando λ_i a los autovalores de la matriz B . Esta propiedad se puede generalizar para cualquier matriz no singular e incluso para operadores invertibles que difieren del operador identidad en K , un operador de traza finita (Kontsevich y Vishik 1994). Dando por cierta esta igualdad entre⁵ $\log \text{Det}$ y $\text{Tr} \log$, la corrección de un bucle $\Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi]$ a la acción efectiva es⁶

$$(II.2.15) \quad \Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi] = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \log (G^{-1}A),$$

Si además utilizamos la fórmula válida para operadores C y D definidos positivos

$$(II.2.16) \quad -\log \left(\frac{C}{D} \right) = \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} (e^{-\beta C} - e^{-\beta D}),$$

e intercambiamos el signo integral con la traza, obtenemos el resultado final

$$(II.2.17) \quad \Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi] = -\frac{\hbar}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} (\text{Tr} e^{-\beta A} - \text{Tr} e^{-\beta G}).$$

Gracias a esta expresión, podemos relacionar las correcciones cuánticas a la acción efectiva de orden un bucle con la función espectral $K_X(\beta)$, llamada traza del NdC del operador X y definida como

$$(II.2.18) \quad K_X(\beta) := \text{Tr}(e^{-\beta X}).$$

El estudio de este tipo de funciones, definidas a través del espectro de un operador, pertenece a la rama de las matemáticas denominada geometría espectral (Kirsten 2000). Siendo su motivación el estudio de (II.2.17), en el capítulo siguiente enunciaremos y formalizaremos algunas de las propiedades generales que las FE han demostrado poseer.

Antes, en la siguiente sección, mostraremos cómo el método de renormalización permite regularizar las divergencias que impregnan las FE y hasta este momento hemos omitido.

2.3. Sobre la renormalización

Es sabido que las TCC se encuentran plagadas de divergencias que deben ser eliminadas para dar sentido físico a los resultados. En el caso de un desarrollo diagramático en el espacio de momentos, tal cual hemos bosquejado en la sección 1.2, las divergencias se presentan en

⁵Las mayúsculas en Tr y Det son utilizadas para la traza y el determinante de operadores sobre espacios de dimensión infinita.

⁶Fuera de esta sección utilizaremos las unidades en las cuales \hbar puede ser tomada como la unidad.

general en la integración de grandes o pequeños momentos, y por este motivo reciben el nombre de divergencias UV o IR.

La fórmula (II.2.17) para la AE no es la excepción, visto que arrastra las divergencias en la definición del determinante funcional del operador de fluctuaciones cuánticas. Actualmente, la forma aceptada de curar estas divergencias es haciendo uso del proceso de renormalización, propuesta inicialmente por Dyson (1949), R. Feynman (1950), J. S. Schwinger (1948) y Tomonaga y Oppenheimer (1948). En esta sección, afrontaremos la renormalización de la acción efectiva al orden de un bucle haciendo uso de las propiedades del NdC. Un método relacionado y más frecuente en la literatura es el de la renormalización a partir de la definición de otra función espectral, la función zeta (Vassilevich 2003); estas técnicas fueron concebidas por Dowker y Critchley (1976) y Hawking (1977) y fueron rápidamente difundidas debido a la simpleza con la que permiten encarar el estudio de campos definidos sobre variedades curvas. En el anexo 2.A estableceremos la conexión entre ambos métodos.

En el lenguaje moderno, la renormalización esquemáticamente consta de los siguientes pasos: primero se regularizan las contribuciones divergentes a la AE a través de la introducción de un parámetro ϵ , de forma que en el límite $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ la expresión regularizada concuerde formalmente con el resultado original. Luego, se agrupan en la AE todos los términos que tienen la misma dependencia en los campos, dando como resultado un lagrangiano con nuevas constantes de acoplamiento (que llamaremos renormalizadas), definidas en término de las originales (desnudas) y del parámetro ϵ .

La forma de determinar las constantes renormalizadas es a través de mediciones experimentales, si corresponden a términos que estaban en el lagrangiano original o son divergentes en el límite $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$; el resto de las constantes, las surgidas de contribuciones finitas, queda definido por las anteriores. Esto motiva la siguiente clasificación: si el número de constantes a determinar experimentalmente crece sin límite al aumentar el número de bucles, el modelo se llama no renormalizable; si es finito pero con infinitas contribuciones divergentes es renormalizable; finalmente, en el caso restante estamos frente a un modelo superrenormalizable.

Para analizar cómo se realiza la renormalización utilizando el NdC, comencemos notando que a partir de (II.2.17) se comprende intuitivamente que las contribuciones diagramáticas con partículas virtuales muy energéticas corresponden a grandes autovalores del operador de fluctuaciones A ; por ende, adquieren importancia para valores pequeños

del parámetro β . En otras palabras, las divergencias UV deberían manifestarse como un mal comportamiento del integrando para valores de β cercanos a cero. Por el contrario, posibles problemas a bajas energías serían relevantes en el límite en el cual β es indefinidamente grande; usualmente, estos inconvenientes se verán controlados por la presencia de un término de masa en los operadores A y G , que confiere al integrando un decrecimiento exponencial $e^{-\beta m^2}$.

Con el fin de establecer estas conclusiones en forma precisa, usaremos un resultado que formalizaremos en el próximo capítulo, referente al núcleo de calor: bajo ciertas condiciones, es posible encontrar un desarrollo asintótico

$$(II.3.1) \quad \text{Tr } e^{-\beta A} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(A) \beta^{(n-d)/2}, \quad \text{para } \beta \downarrow 0,$$

donde d es la dimensión del espacio sobre el cual se encuentra definido el campo y las cantidades $a_n(A)$ se denominan coeficientes de Seeley-DeWitt (SDW). Reemplazando en (II.2.17), resulta patente que los primeros términos de este desarrollo no serán bien comportados al integrar valores pequeños de la variable β .

Buscando regularizar dichas cantidades introducimos un parámetro Λ , llamado parámetro de corte UV, que posee unidades de momento y en cuyo límite formal $\Lambda \rightarrow \infty$ reobtenemos la expresión original de la AE. Haciendo explícito el término de masa a través de la definición $A =: B + m^2$ y usando (II.3.1), la contribución del operador de fluctuaciones cuánticas A a la AE resulta

$$(II.3.2) \quad \begin{aligned} \Gamma_{1\text{-bucle}, A}[\phi] &= -\frac{1}{2} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{\beta} \text{Tr } e^{-\beta B} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} m^{d-n} \Gamma\left((n-d)/2, \frac{m^2}{\Lambda^2}\right) a_n(B), \end{aligned}$$

escrito en términos de la función gamma incompleta $\Gamma(\cdot, \cdot)$ (Abramowitz y Stegun 1964). De acuerdo al desarrollo de esta función para pequeños valores de su segundo argumento, dado por

$$(II.3.3) \quad \Gamma(s, a) \sim \int_a^1 x^{s-1} + \dots,$$

la expresión (II.3.2) posee un número finito de términos divergentes, a saber, aquellos para los cuales $0 \leq n \leq d$. Como hemos establecido previamente, estos deben ser eliminados redefiniendo las constantes de acoplamiento en la acción original: el lagrangiano, si es que aún no los tenía, pasará a poseer términos de la forma de $a_0(B), a_1(B), a_2(B), \dots, a_d(B)$.

Este proceso no es único, visto que las constantes renormalizadas sólo están definidas a menos de términos finitos (t.f.); por este motivo es preciso fijar una regla en la elección de dichas constantes. Una de las más simples a la hora de realizar cálculos es la prescripción de mínima sustracción, la cual establece que la constante renormalizada se construye a partir de la constante desnuda agregando sólo la parte divergente de las contribuciones. Por ej., de acuerdo a esta prescripción, $\Gamma(0, \frac{m^2}{\Lambda^2}) \approx -\log(\frac{m^2}{\Lambda^2}) - \gamma + \dots$, donde γ es la constante de Euler, aportaría sólo el término logarítmico a la renormalización.

Habiendo cancelado las divergencias UV, resta adicionar a la acción original los términos finitos en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$,

$$(II.3.4) \quad -\frac{1}{2} \sum_{n=d+1}^{\infty} m^{d-n} \Gamma((n-d)/2) a_n(B).$$

En este momento podría surgir la sensación de que sólo hemos escondido el problema de las divergencias debajo de la alfombra. Una interpretación que despeja estas dudas la ofrecen las ideas del grupo de renormalización de Wilson (Polchinski 1984, Wilson y Kogut 1974). Desde este punto de vista el parámetro de corte Λ se vincula a la escala de energía fundamental a la cual el modelo está definido; dicho en otros términos, el modelo involucra sólo los modos del campo con energía menores a Λ , lo cual limita los eventos para los cuales podrán realizarse predicciones. Más aún, la dependencia de las constantes de acoplamiento con la escala no debe ser entendida como un mero paso intermedio antes de tomar el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, sino que es una consecuencia natural, inherente a la incorporación de información sobre los modos del campo con grandes impulsos. Para analizar esta dependencia se define para cada constante de acoplamiento desnuda λ la función

$$(II.3.5) \quad \beta_\lambda = \Lambda \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda} \right|_{\lambda_R},$$

donde la derivada debe realizarse a valores fijos de la constante renormalizada λ_R . La función β , como veremos en las secciones 4.3 y 6.3, brinda información valiosa sobre la validez del análisis perturbativo de la teoría a diversas escalas de energía.

En resumen, hemos mostrado cómo es posible aplicar las técnicas espectrales a la renormalización; en la siguiente sección, veremos que también ofrecen un método eficiente para el cálculo de energías de Casimir.

2.4. El efecto Casimir

En 1948, Hendrik Casimir publicó un trabajo (Casimir 1948) en el cual estudiaba la interacción entre dos placas metálicas debido a la presencia de un campo electromagnético en el marco de la segunda cuantización o, visto en perspectiva, la influencia de las condiciones externas en una teoría cuántica de campos. La peculiaridad de este efecto, que vendrá llamado efecto Casimir, radica en su manifestación macroscópica pese a su origen cuántico: dadas dos placas de 1 cm^2 de área, separadas por una distancia de $1 \mu\text{m}$, la fuerza de interacción es del orden de 10^{-7} N . Asimismo, su fuerte dependencia en la forma de las placas lo hace un excelente candidato para aplicaciones nanotecnológicas (Bellucci y Saharian 2009), sin mencionar su uso en modelos de cromodinámica cuántica (Bordag, Elizalde *et al.* 1997, Elizalde *et al.* 1998). Los experimentos más precisos diseñados para medir la fuerza de Casimir, son una serie de trabajos realizados por Chang *et al.* (2012) y Mohideen y Roy (1998); se basan en el uso de microscopios de fuerza atómica y sus resultados poseen un 1 % de error experimental. Para un análisis detallado sobre el efecto Casimir el lector puede referirse a los trabajos de Bordag, Mohideen *et al.* (2001), Milton (2001) y Plunien *et al.* (1986).

El razonamiento propuesto originalmente por Casimir es sencillo: comencemos considerando una cavidad cúbica formada por paredes metálicas de arista L . El campo electromagnético, cuánticamente, se comporta como un conjunto de infinitos osciladores armónicos con vectores de onda $\mathbf{k}_\mathbf{n}$ y frecuencias $\omega_\mathbf{n}$, relacionados por la velocidad de la luz c :

$$(II.4.1) \quad \omega_\mathbf{n} = c \mathbf{k}_\mathbf{n} = \frac{\pi c}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3.$$

De este modo la menor energía posible para un estado (la energía E_0 de vacío) queda escrita como la suma sobre las frecuencias⁷

$$(II.4.2) \quad E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3} \hbar \omega_\mathbf{n} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3} \frac{\pi \hbar c}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$$

En el marco de la TCC, procediendo de acuerdo a los lineamientos de la cuantización canónica, es costumbre obtener una expansión del operador de campo en la base de funciones que minimizan la acción, en conjunto con operadores de creación $a_\mathbf{k}^\dagger$ y destrucción $a_\mathbf{k}$. Notemos

⁷Casimir, al trabajar con el campo electromagnético, agrega un factor 2 a la expresión (II.4.2), correspondiente a las posibles polarizaciones del campo.

que tanto la base como los operadores están rotulados con un índice⁸ \mathbf{k} . De esta manera el operador hamiltoniano, para un campo escalar de masa m , toma la forma

$$(II.4.3) \quad \hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right),$$

donde $\omega_{\mathbf{k}}$ son las energías de los modos, mientras que $a_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ satisfacen las reglas de conmutación bosónicas

$$(II.4.4) \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad \forall \mathbf{k}, \mathbf{k}'.$$

Definiendo el estado de vacío $|0\rangle$ como aquel para el cual $a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$, el valor de expectación del hamiltoniano resulta ser en este caso la energía de vacío⁹:

$$(II.4.5) \quad E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle.$$

Recapitulando, la suma (II.4.2) es evidentemente divergente y carece de sentido. No obstante, esta energía de vacío no es una cantidad medible. La genialidad de Casimir consistió en encontrar una expresión finita para una cantidad medible, la fuerza de interacción entre las placas: con ese fin, analizó el caso de dos placas paralelas de área infinita y separadas por una distancia a . Esto es análogo a tomar el límite $L \rightarrow \infty$ en las dimensiones de las placas consideradas, lo cual transforma las sumas correspondientes en integrales

$$(II.4.6) \quad \mathcal{E} := \frac{E_0}{L^2} = \frac{\hbar c}{2(2\pi)^2} \sum_n \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + k^2} d^2 k.$$

La variación $\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta a}$ de la densidad de energía por unidad de área de las placas al modificar la distancia de separación a es por tanto la fuerza por unidad de área a la que se encuentran sometidas estas placas para que el sistema se encuentre en equilibrio.

En este punto Casimir propuso introducir una función $f(k)$ que regulariza la expresión, es decir, una función tal que resulta convergente

⁸Este índice puede tener componentes tanto continuas como discretas dependiendo de la geometría del problema.

⁹La energía de vacío no puede ser eliminada introduciendo el orden normal de los campos en un espacio genérico (Birrell y Davies 1982), al menos no si se desea analizar qué sucede al modificar lentamente la geometría del problema. Tomando por ejemplo un campo escalar sobre un intervalo de longitud L en cuyos extremos satisface condiciones de contorno Dirichlet, sí podría elegirse la energía de vacío como nula para un dado L , pero fijado este valor dejaría de serlo para longitudes $L' \neq L$.

la integral

$$(II.4.7) \quad \sum_n \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{a^2} + k^2} f(k) d^2k.$$

Hoy en día es frecuente la utilización de técnicas similares, como la de la función zeta: consideraremos la integral dependiente del parámetro¹⁰ $s \in \mathbb{C}$

$$(II.4.8) \quad \mathcal{E}(s) = \frac{\hbar c}{2(2\pi)^2 \mu} \sum_n \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\pi^2 n^2 a^{-2} + k^2}{\mu^2} \right)^{-s} d^2k,$$

y la calcularemos en la región en la que se encuentre bien definida; posteriormente extenderemos analíticamente el resultado al valor de interés $s = -1/2$. En esta expresión, el parámetro μ posee unidades de masa y físicamente debe ser introducido para lidiar con las unidades del integrando. Haciendo uso de la representación de tiempo propio de J. Schwinger (1951) para la potencia y la función Zeta de Riemann (Abramowitz y Stegun 1964) $\zeta_R(\cdot)$, la expresión para la densidad de energía, válida en la región $\text{Re } s > 2$, es

$$(II.4.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(s) &= \frac{\hbar c}{2\Gamma(s)} \mu^{2s-1} \sum_n \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k}{(2\pi)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^s e^{-t(k^2 + n^2\pi^2/a^2)} \\ &= -\frac{\pi^{1/2-2s}}{16} \hbar c \mu^{2s-1} a^{2(s-1)} \Gamma(s-1) \zeta_R(2(s-1)). \end{aligned}$$

Si observamos detenidamente, en (II.4.9) ha surgido naturalmente el NdC de la parte espacial del operador de fluctuaciones cuánticas para el campo escalar libre entre dos placas. Esto no es una casualidad sino una consecuencia de la estrecha relación existente entre el NdC y la función zeta, relación estudiada con más detalle en el anexo 2.A.

Retornando al cálculo de la energía de Casimir, la extensión analítica al punto de interés $s = -1/2$ es finita y arroja el valor

$$(II.4.10) \quad \mathcal{E}(-1/2) = -\frac{\pi^2}{1440} \frac{\hbar c}{a^3}.$$

Por otra parte, es inmediata la obtención de la fuerza por unidad de superficie

$$(II.4.11) \quad \mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{480} \frac{\hbar c}{a^4}.$$

¹⁰Esta integral es básicamente la función ζ , definida en el anexo 2.A, del operador derivada segunda con condiciones de contorno Dirichlet en dos planos paralelos. Por supuesto, de aquí deriva el nombre de la técnica.

Este, salvo por el factor 2 de la polarización del campo, es el resultado original de Casimir.

Una cantidad que guarda estrecha relación con la energía de Casimir, al punto tal de ser confundidas, es la energía efectiva E_{eff} . A continuación intentaremos despejar esta confusión.

2.4.1. La energía efectiva. La energía efectiva E_{eff} está definida a través de la contribución de un bucle $\Gamma_{1\text{-bucle}}$ a la acción efectiva como (Blau *et al.* 1988)

$$(II.4.12) \quad E_{\text{eff}} := \frac{\Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi = 0]}{T},$$

siendo T el tamaño temporal del universo. Para mostrar los argumentos que motivan la introducción de esta cantidad precisaremos algunos resultados previos sobre la AE.

Suponiendo que la AE es una funcional regular, admite un desarrollo de la forma

$$(II.4.13) \quad \Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n),$$

donde¹¹ $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi(x_1) \cdots \delta \phi(x_n)}$. Otro desarrollo posible de la acción efectiva es en el número de derivadas del campo o, si se prefiere, en potencias de las variables de momento:

$$(II.4.14) \quad \Gamma[\phi] = \int V_{\text{eff}}(\phi(x)) + \frac{1}{2} Z(\phi(x)) (\partial \phi(x))^2 + O(\partial \phi(x))^4.$$

Igualando las expresiones (II.4.13) y (II.4.14), el potencial efectivo V_{eff} puede ser escrito en término de las funciones $\Gamma^{(n)}$ como

$$(II.4.15) \quad V_{\text{eff}}(\phi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int dx_2 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x, x_2, \dots, x_n) \right) \phi^n(x).$$

Es posible demostrar que para una teoría invariante traslacional, el término entre paréntesis resulta ser independiente de la variable x . Más aún, tomando el potencial efectivo sobre configuraciones que toman un valor ϕ constante en el espacio, se puede obtener la relación

$$(II.4.16) \quad \left(\frac{d}{d\phi} \right)^n V_{\text{eff}}(\phi) \Big|_{\phi=0} = \int dx_2 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x, x_2, \dots, x_n).$$

¹¹Estas funciones $\Gamma^{(n)}$ resultan ser las funciones propias de vértice, es decir, aquellas que contienen la información proveniente de los diagramas de Feynman irreducibles de 1 partícula (Itzykson y Zuber 1980). Ergo, la acción efectiva es la funcional generatriz de las funciones propias de vértice.

En particular y en tono con lo expuesto a continuación de (II.1.5), resulta que el potencial efectivo posee un extremo para el valor medio de vacío $\phi = \phi_{\min}$ tal que:

$$(II.4.17) \quad \left. \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \right|_{\phi=\phi_{\min}} = J[\phi](x) \Big|_{\phi=\phi_{\min}} = 0 = V'_{\text{eff}}(\phi_{\min}).$$

El resultado general establece que se puede relacionar el potencial efectivo $V_{\text{eff}}(\phi)$ con el valor mínimo que la densidad Hamiltoniana toma sobre estados para los cuales el valor medio del campo cuántico es $\langle\varphi(x)\rangle = \phi$, un valor constante; de aquí la importancia que reviste (II.4.16). El valor medio de vacío $\phi = \phi_{\min}$ es especial ya que corresponde al mínimo del potencial efectivo y, por ende, al mínimo de la densidad Hamiltoniana sobre estados cuyo valor medio es independiente de las coordenadas (Coleman 1988). Verbigracia, ϕ_{\min} sería el estado de vacío ante la hipótesis de invariancia traslacional; sin pérdida de generalidad podríamos además suponer $\phi_{\min} = 0$, pues para el campo $\phi'(x)$, definido de acuerdo a

$$(II.4.18) \quad \phi(x) = \phi'(x) + \phi_{\min},$$

la configuración de vacío es la trivial. Hechas estas aclaraciones, la definición (II.4.12) equivale a la contribución de orden¹² \hbar a $V_{\text{eff}}(\phi_{\min})$.

Finalmente, es posible demostrar que para universos ultraestáticos la diferencia entre la energía de Casimir y la energía efectiva es un término que depende de un coeficiente del núcleo de calor o, por transitividad, de la geometría del problema (Blau *et al.* 1988, Elizalde 2012).

¹²La contribución \hbar^0 a $V_{\text{eff}}(\phi_{\min})$ siempre puede ser elegida como nula.

Anexos

2.A. Relación entre la renormalización *alla* zeta y *alla* núcleo de calor

Dado un operador A que actúa sobre funciones de \mathbb{R}^d y con autovalores λ_n se define su función espectral zeta en la forma

$$(II.A.1) \quad \begin{aligned} \zeta_A(s) &:= \text{Tr } A^{-s} \\ &= \sum_n \lambda_n^{-s}. \end{aligned}$$

En este anexo no nos centraremos en estudiar las propiedades de esta función; será suficiente notar que, bajo hipótesis bastante generales, la suma converge eligiendo $\text{Re}(s)$ suficientemente grande. Luego, puede realizarse la extensión analítica de la función resultante al resto del plano complejo s .

Conviene mencionar antes de proseguir que el NdC y la función zeta se encuentran relacionados a través de la transformada de Mellin

$$(II.A.2) \quad \zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^s K_A(\tau),$$

lo cual se puede verificar formalmente utilizando la definición de ambos en términos de los autovalores del operador A . A la inversa, se puede representar el núcleo de calor en términos de la función zeta utilizando la integral

$$(II.A.3) \quad K_A(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint ds t^{-s} \Gamma(s) \zeta_A(s)$$

sobre una curva cerrada que encierra todos los polos del integrando.

Consideremos ahora la derivada de la función zeta evaluada en cero; de acuerdo a la definición (II.A.1) vale

$$(II.A.4) \quad -\zeta'_A(0) := \log \left(\prod_n \lambda_n \right).$$

Esta ecuación motiva, dados un operador A y un parámetro de escala μ , la definición del determinante del operador en términos de la función

zeta de acuerdo a la expresión

$$(II.A.5) \quad \frac{1}{2} \log \text{Det } \mu^{-1} A := -\frac{1}{2} \zeta'_A(0) - \log \mu \zeta_A(0).$$

En pos de analizar su valor en $s = 0$, podemos obtener un desarrollo para la función zeta de A combinando la transformada de Mellin con el desarrollo asintótico (II.3.1) del NdC de $B := A - m^2$:

$$(II.A.6) \quad \begin{aligned} \zeta_A(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau m^2} \sum_{n=0}^\infty a_n(B) \tau^{(n-d)/2} \\ &= m^{-2s} \sum_{n=0}^\infty m^{d-n} \frac{\Gamma(s + (n-d)/2)}{\Gamma(s)} a_n(B). \end{aligned}$$

Si d es impar ninguno de los factores de (II.A.6) posee polos, de manera que el término $1/\Gamma(s)$ anula todas las contribuciones¹³. Consecuentemente, para dimensiones impares $\zeta_A(0) = 0$ y el determinante resulta independiente del parámetro de escala μ . En el caso de dimensiones pares, las divergencias de los términos para los cuales $0 \leq n \leq d$ son compensadas por el factor $1/\Gamma(s)$, por lo que las contribuciones a la función zeta para $s = 0$ son

$$(II.A.7) \quad \zeta_A(0) = \sum_{n=0}^d m^{d-n} \frac{(-1)^{(d-n)/2}}{((d-n)/2)!} a_n(B).$$

En definitiva, la dependencia en la escala arbitraria μ es proporcional a los coeficientes $a_0(A), a_1(A), \dots, a_d(A)$ y puede ser eliminada de las cantidades físicas renormalizando las constantes de acoplamiento adecuadas. Este es el análogo a las contribuciones divergentes en (II.3.2), encontradas mediante el método del núcleo de calor.

A continuación, podemos hacer un análisis similar para la derivada de la función zeta, la cual, derivando formalmente (II.A.6), se puede escribir en términos de la función digamma $\psi(z) := \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ (Abramowitz y Stegun 1964):

$$(II.A.8) \quad \begin{aligned} -\zeta'_A(s) &= \log m^2 \zeta_A(s) \\ &- m^{-2s} \sum_{n=0}^\infty m^{d-n} \frac{\Gamma(s + (n-d)/2)}{\Gamma(s)} \{\psi(s + (n-d)/2) - \psi(s)\} a_n(B). \end{aligned}$$

El primer término es proporcional a la función zeta y por ende no precisa de un nuevo análisis. El restante, conviene analizarlo tomando

¹³Esta aseveración es válida bajo la hipótesis de que el espacio sobre el cual está definido el operador A no posee bordes (en esta ocasión \mathbb{R}^d), pues entonces los coeficientes $a_n(B)$ se anulan si n es impar.

para n los siguientes intervalos: si $0 \leq n \leq d$, hay contribuciones finitas ya sea porque n tiene la paridad de d y la función $\Gamma(s + (n - d)/2)$ posee un polo, a la vez que la diferencia $\psi(s + (n - d)/2) - \psi(s)$ es analítica en $s = 0$, o porque d tiene la restante paridad, y sucede lo contrario. En todo caso, obtenemos contribuciones adicionales finitas que en el proceso de renormalización deben ser añadidas a las de (II.A.7). Por su parte, el término $n = d$ se anula independientemente de la dimensión d con la cual trabajemos. En cuanto se refiere a los restantes términos, i.e. aquellos con $n > d$, originan las contribuciones a la AE

$$(II.A.9) \quad -\frac{1}{2} \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{\Gamma((n - d)/2)}{m^{n-d}} a_n(B),$$

coincidentes con las encontradas en (II.3.4) gracias al método del NdC.

CAPÍTULO 3

Sobre las funciones espectrales

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

– GALILEO GALILEI, *Il Saggiatore*, Cap. VI.

El NdC responde al problema clásico de la difusión del calor, modelado a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (Courant e Hilbert 1934, Hadamard 1932). En el contexto de las teorías cuánticas, la primera referencia que encontramos sobre su uso corresponde a Fock (1937), quien lo utilizó en el cálculo de funciones de Green. Más cerca en el tiempo, quizás el trabajo más famoso en el que ha sido empleado es en la construcción de una teoría covariante de la gravedad cuántica por parte de DeWitt (1967). Por cierto, en el capítulo precedente hemos visto, para el caso sencillo de un campo escalar en TCC, cómo surgen con naturalidad las FE de operadores diferenciales en la realización de cálculos perturbativos, cfr. (II.2.17).

Detrás de las FE existe un formalismo matemático que ha dado lugar a la creación de una entera rama de las matemáticas llamada geometría espectral. Esta rama investiga la relación entre la geometría de una variedad y los autovalores de operadores sobre ella definidos; esto se suele resumir en la metafórica pregunta formulada por Kac (1966): “*Can we hear the shape of a drum?*”¹.

El puntapié inicial para la concepción de la geometría espectral fue dado a principios del siglo XX por Weyl (1912), quien demostró que el comportamiento asintótico de los autovalores del operador Laplaciano,

¹“¿Podemos escuchar la forma de un tambor?”, en inglés.

con condiciones de contorno Dirichlet en el borde de una región compacta suave, permite determinar el volumen de esta última. Seguidamente se observó que tanto el NdC como la función zeta del Laplaciano contienen gran cantidad de información referida a la variedad sobre la cual se encuentran definidos (Carleman 1934, Minakshisundaram y Pleijel 1949). Los resultados para operadores diferenciales más generales que el Laplaciano fueron acuñados por Seeley en una serie de trabajos publicados a fines de la década de 1960 (Seeley 1967, 1969a,b).

Este capítulo tiene como propósito dar sustento a las técnicas espectrales que consideraremos en el resto de esta tesis. Para ello, enunciaremos algunos resultados de la geometría espectral, dedicándonos especialmente al NdC de cierta clase de operadores diferenciales. Como paso previo, deberemos establecer ciertas propiedades de los operadores en cuestión (Gilkey 1995, Wloka et al. 1995).

3.1. Nociones generales sobre operadores diferenciales

Antes de definir qué es lo que entendemos por operador diferencial en derivadas parciales, conviene introducir la notación de multi-índices, la cual facilitará la notación de este capítulo.

DEFINICIÓN 1. *Un multi-índice α es una m -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de enteros no negativos α_j .*

DEFINICIÓN 2. *Dado un multi-índice α definimos*

$$\begin{aligned}
 |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \\
 \alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_m!, \\
 x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \\
 D_x^\alpha &:= (-i)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\alpha_m}.
 \end{aligned}
 \tag{III.1.1}$$

Haciendo uso de dicha notación, podemos definir en forma compacta la clase de operadores sobre los que centraremos nuestra atención.

DEFINICIÓN 3. *Un operador lineal $P : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ que mapea el espacio de funciones suaves definidas sobre \mathbb{R}^d en sí mismo es un operador en derivadas parciales de orden b si tiene una expresión polinómica*

$$P := p(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq b} a_\alpha(x) D_x^\alpha,
 \tag{III.1.2}$$

donde los coeficientes $a_\alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{k \times k}$ son funciones suaves que toman valores en un espacio matricial complejo de dimensión k .

A este tipo de operadores corresponden $G = -\partial^2 + m^2$, definido luego de (II.2.6) y coincidente con el operador laplaciano en el caso $m = 0$, y, por lo general, el operador $\delta_\phi^2 S$ introducido en (II.2.2). De acuerdo a la definición (III.1.2), la acción de un operador diferencial P sobre una función $f(x) \in \mathcal{S}$, el espacio de Schwartz², es

$$\begin{aligned} P f(x) &= \int e^{ix\xi} p(x, \xi) \tilde{f}(\xi) d\xi \\ (III.1.3) \quad &= \int e^{i(x-y)\xi} p(x, \xi) f(y) dy d\xi. \end{aligned}$$

En esta expresión hemos utilizado la transformada de Fourier $\tilde{f}(p)$ de la función $f(x)$, escrita de acuerdo a la convención

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p) &= \int e^{-ipx} f(x) dx \\ (III.1.4) \quad &= \int e^{-i(p-q)x} \tilde{f}(q) dx d\tilde{q}, \end{aligned}$$

en la cual³ $d\tilde{q} := dq/(2\pi)^d$. La ec. (III.1.3) motiva la siguiente definición, de la que a su vez resultan inmediatas dos propiedades características de un operador diferencial de orden b :

DEFINICIÓN 4. El símbolo $\sigma(P) : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}^{k \times k}$ de un operador diferencial $P = p(x, D)$ está definido como

$$(III.1.5) \quad \sigma(P)(x, \xi) := p(x, \xi).$$

Por otro lado, el símbolo principal $\sigma_L(P)$ consta de los términos de mayor orden como función en ξ de $\sigma(P)$:

$$(III.1.6) \quad \sigma_L(P)(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=b} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

PROPIEDAD 4.1. El símbolo $\sigma(P)(x, \xi)$ es un polinomio de orden b en la variable dual ξ .

PROPIEDAD 4.2. El símbolo principal $\sigma_L(P)(x, \xi)$ es un polinomio homogéneo de grado b en ξ .

²El espacio de Schwartz \mathcal{S} es el conjunto de funciones $f(x)$ suaves definidas sobre \mathbb{R}^d , tales que para multi-índices α, β cualesquiera existen constantes $C_{\alpha, \beta}$ que satisfacen la relación $|x^\alpha D_x^\beta f| \leq C_{\alpha, \beta}$. La transformada de Fourier es un isomorfismo en este espacio.

³Usaremos la siguiente notación: una tilde sobre una función representa su transformada de Fourier \mathcal{F} , mientras que una tilde en un diferencial implica un factor $(2\pi)^{-d}$.

Los resultados que estableció R.T. Seeley se refieren a un conjunto más restringido que el de los operadores lineales en derivadas parciales. Las restricciones de las siguientes definiciones bastarán para poder enunciar el lema fundamental de esta sección sobre operadores diferenciales y el teorema sobre su NdC.

DEFINICIÓN 5. *Un operador diferencial P se dice elíptico sii su símbolo principal $\sigma_L(P)$ es invertible para $|\xi| = 1$ o, equivalentemente, sii $\det \sigma_L(P)(x, \xi) \neq 0$ para $|\xi| = 1$.*

DEFINICIÓN 6. *Un operador diferencial P se dice definido positivo sii su símbolo principal puede ser elegido para $\xi \neq 0$ como una matriz hermitica definida positiva (con autovalores $\lambda > 0$).*

Es preciso realizar algunos comentarios. Primero, la importancia del carácter elíptico radica en que todo operador diferencial elíptico P , en caso de que exista, posee un operador adjunto P^\dagger que resulta ser también un operador diferencial. Por otro lado, a diferencia de lo que podría parecer a primera vista, el espectro de un operador definido positivo no es necesariamente no negativo, aunque sí posee una cota inferior.

Todas las definiciones y propiedades precedentes son fácilmente generalizables al caso de un fibrado vectorial V suave, definido sobre \mathcal{M} , una variedad Riemanniana d -dimensional, suave y compacta, que supondremos sin borde. Para ello, será necesario suponer que V posee una dada métrica Riemanniana compatible, de forma que el espacio $L^2(V)$ de funciones de cuadrado integrable Lebesgue sobre la variedad esté definido en forma invariante. Salvo que explicitemos lo contrario, todo aquello que enunciaremos en el resto del capítulo corresponderá a este caso.

Finalmente, podemos establecer el principal resultado de esta sección, expresado en el⁴

LEMA 1. *Sea $P : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ un operador diferencial elíptico y autoadjunto de orden $b > 0$:*

- a) se puede encontrar una base ortonormal completa de autovectores $\{\phi_{n \in \mathbb{N}}\}$ para $L^2(V)$, con autovalores $\lambda_n \in \mathbb{R}$;*
- b) los autovectores ϕ_n son suaves y se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty;$$

- c) si ordenamos los autovalores en orden creciente $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, entonces existen constantes $C, \delta > 0$ tales que $|\lambda_n| \geq C n^\delta$ si n es grande.*

⁴Para su demostración, ver el trabajo de Gilkey (1995), capítulo 1.

3.2. El núcleo de calor

La traza del NdC, función espectral que en (II.2.18) hemos presentado, puede ser analizada con formalidad en el contexto de la teoría de operadores diferenciales elípticos. El punto de partida es, indudablemente, la generalización del afamado problema de la difusión de calor estudiado por J. Fourier en el siglo XIX. Efectivamente, consideremos la

DEFINICIÓN 7. *Dado un operador diferencial P elíptico de orden $b > 0$, autoadjunto y definido positivo sobre un fibrado vectorial⁵ V con variedad de base \mathcal{M} , la ecuación de calor asociada es*

$$(III.2.1) \quad \left(\frac{d}{dt} + P \right) f(x, t) = 0, \quad \text{para } x \in \mathcal{M} \text{ y } t \geq 0,$$

con la condición inicial

$$(III.2.2) \quad f(x, 0) = f(x).$$

La solución a (III.2.1) es, formalmente, $f(x, t) = e^{-tP} f(x)$. En forma más precisa, de acuerdo a los resultados del Lema 1, existe una base de autofunciones $\phi_{n \in \mathbb{N}}$ del operador P en términos de la cual podemos escribir la serie de Fourier generalizada $f(x, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(x)$. En consecuencia, resulta inmediato que la solución a la ecuación de calor puede escribirse como

$$(III.2.3) \quad f(x, t) = \sum_n e^{-\lambda_n t} (\phi_n, f) \phi_n(x)$$

$$(III.2.4) \quad = \int_{\mathcal{M}} K(t, x, y) f(y) \sqrt{g} dy,$$

donde hemos introducido la medida invariante sobre la variedad base \mathcal{M} utilizando su métrica g y hemos definido (formalmente) el NdC

$$(III.2.5) \quad K(t, x, y) = \sum_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(x) \otimes \phi_n^\dagger(y).$$

De estas ecuaciones, deducimos que el operador e^{-tP} es un operador integral cuyo núcleo resulta ser $K(t, x, y)$. Este núcleo tiene la propiedad de ser una función infinitamente suave de las variables (t, x, y) para $t > 0$, por lo que se pueden justificar todos los manejos formales realizados precedentemente.

Entre otras características del núcleo $K(t, x, y)$, enunciaremos el resultado principal de este capítulo, resumido en el siguiente⁶

⁵Recordemos que supondremos de aquí en adelante que el fibrado satisfará las hipótesis detalladas en la sección anterior. Utilizaremos también idéntica notación.

⁶Para su demostración, ver el trabajo de Gilkey (1995), capítulo 1.

TEOREMA 1. Sea P un operador en derivadas parciales de orden $b > 0$, elíptico, autoadjunto y definido positivo sobre un fibrado vectorial V . Entonces, si $K(t, x, y)$ es el núcleo de e^{-tP} , vale el desarrollo asintótico de su diagonal

$$(III.2.6) \quad K(t, x, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{n-d}{b}} e_n(x, P), \quad \text{para } t \downarrow 0.$$

Además, las cantidades $e_n(x, P)$ dependen de un número finito de coeficientes del símbolo $p(x, \xi)$ pensado como polinomio en ξ , y resultan ser invariantes frente a cualesquiera elecciones del sistema de coordenadas en \mathcal{M} y la trivialización local de V . Más aún, si n es impar resulta que⁷ $e_n(x, P) = 0$.

A partir de (III.2.6) se puede obtener el resultado correspondiente a la traza del núcleo de calor, la cual en el caso de operadores con símbolo principal escalar es

$$(III.2.7) \quad \begin{aligned} \text{Tr}_{L_2} e^{-tP} &= \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}_{V_x} K(t, x, x) \sqrt{g} dx \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{n-d}{b}} \int_{\mathcal{M}} dx \sqrt{g} a_n(x, P), \quad \text{para } t \downarrow 0 \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{n-d}{b}} a_n(P), \quad \text{para } t \downarrow 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes $a_n(x, P)$ reciben el nombre de invariantes escalares locales de Seeley-DeWitt (SDW) del desarrollo asintótico del núcleo de calor y están definidos como la traza Tr_{V_x} de $e_n(x, P)$ sobre la fibra V situada en el punto x

$$(III.2.8) \quad a_n(x, P) = \text{Tr}_{V_x} e_n(x, P).$$

En tanto, sus integrales $a_n(P) = \int_{\mathcal{M}} a_n(x, P)$ sobre la variedad se denominan escalares invariantes integrados de SDW o simplemente coeficientes de SDW. Ambos heredan las propiedades de los coeficientes $e_n(x, P)$; entre otras, pueden ser calculados en cualquier sistema de coordenadas y en forma relativa a cualquier trivialización local como expresiones combinatorias de un número finito de coeficientes del símbolo $p(x, \xi)$ de P pensado como polinomio en ξ . También es cierto que $a_n(x, P) = 0$ si n es impar.

⁷Seguidamente veremos que para variedades con borde no vale esta propiedad.

Es frecuente utilizar una función $f(x)$ suave definida sobre \mathcal{M} para definir el desarrollo asintótico

$$(III.2.9) \quad \text{Tr}_{L_2}(f e^{-tP}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{n-d}{b}} a_n(f, P), \quad \text{para } t \downarrow 0.$$

El uso de esta función resultará de ayuda al analizar resultados similares sobre variedades no compactas.

Para finalizar, conviene mencionar que estos resultados pueden ser generalizados a variedades con borde, donde se imponen ciertas condiciones de contorno a través del operador \mathcal{B} . En la gran mayoría de los casos de interés físico, evitando condiciones de contorno no locales (Grubb y Seeley 1995), se obtiene un desarrollo

$$(III.2.10) \quad \text{Tr}(f e^{-tA}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{n-d}{b}} a_n(f, A, \mathcal{B}), \quad \text{para } t \downarrow 0.$$

Los coeficientes $a_n(P, \mathcal{B})$ poseen ahora contribuciones tanto de volumen como de borde de invariantes locales

$$(III.2.11) \quad a_n(f, P, \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{M}} dx \sqrt{g} f(x) a_n(x, P) + \sum_{j=1}^n \int_{\partial \mathcal{M}} dy \sqrt{h} f^{(j)}(y) a_{n,j}(y, P, \mathcal{B}),$$

simbolizando con $f^{(j)}(y)$ la j -ésima derivada en la coordenada normal al borde de la función regularizadora $f(x)$. Bajo estas hipótesis, los coeficientes impares no son necesariamente nulos.

3.2.1. El núcleo de calor para operadores generalizados de Laplace. Para ejemplificar el teorema de la sección previa, podemos analizar el caso de un operador D de segundo orden del tipo de Laplace

$$(III.2.12) \quad D = -(g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} + E),$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa del tensor métrico sobre \mathcal{M} , ∇_{μ} es la derivada covariante que contiene tanto la conexión de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}),$$

como la de spin (ω_{μ}), y E es un endomorfismo en V . Por cuanto el cálculo del desarrollo asintótico del núcleo de calor involucra tan sólo el producto de invariantes locales, conviene identificarlos; en este ejemplo, dichos términos pueden armarse utilizando el endomorfismo E , la

métrica $g^{\mu\nu}$, la derivada covariante ∇_μ y la función suave f que introducimos al tomar la traza. Igualmente, deben considerarse sus derivados: la curvatura de Riemann

$$(III.2.13) \quad R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} := \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\lambda\rho},$$

el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} := R^\sigma{}_{\mu\nu\sigma}$, la curvatura escalar $R := R^\mu{}_\mu$ y el tensor de campo $\Omega_{\mu\nu}$ de la conexión ω_μ :

$$(III.2.14) \quad \Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\mu \omega_\nu - \omega_\nu \omega_\mu.$$

Un método veloz para determinar la forma de los términos de los coeficientes $a_n(f, D)$ consiste en su análisis dimensional. Siendo cierto que t es un parámetro con dimensión de longitud al cuadrado ($[t] = l^2$) y que la diagonal del NdC es adimensional, $a_n(x, D)$ debe tener unidades $[a_n(x, D)] = l^{2(d-n)/2}$. Partiendo del hecho que cada una de las posibles contribuciones tiene dimensiones de l^{-p} , con $p \geq 0$, el número de candidatos a contribuir a un dado coeficiente resulta finito, tal y como lo establece el Teorema 1. Por ejemplo, el primer término debe ser del tipo

$$(III.2.15) \quad a_0(f, D) = \int_{\mathcal{M}} dx \sqrt{g} \operatorname{Tr}_{V_x} \{\alpha_0 f\}$$

con α_0 un número a determinar; por fortuna, bastará hacerlo para un dado operador sobre un cierto fibrado vectorial, visto que no depende de la elección de estos. En el anexo 3.A resumimos una de las técnicas utilizadas para el cálculo de coeficientes, que consiste en tomar el caso especial $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$.

Anexos

3.A. Cálculo de los primeros coeficientes de Seeley-DeWitt para la variedad de base \mathbb{R}^d

En este anexo, estudiaremos el desarrollo asintótico del núcleo de calor correspondiente al operador diferencial introducido en (III.2.12)

$$(III.A.1) \quad D = -(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + E),$$

definido sobre un espacio vectorial V con variedad de base $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$, una variedad no compacta. En este caso, es necesario suponer ciertas condiciones de decrecimiento en el infinito sobre E y la función $f(x)$, con el fin de obtener un núcleo de calor

$$(III.A.2) \quad K(f; t) = \text{Tr}_{L^2}(f e^{-tD})$$

bien comportado. Dada por válida esta suposición, podemos calcular la traza utilizando la base de ondas planas⁸ y la traza Tr_{V_x} sobre la fibra en el punto x de la variedad:

$$(III.A.3) \quad \begin{aligned} K(f; t) &= \int dx \int d\tilde{k} e^{-ikx} \text{Tr}_{V_x} \{f(x) e^{-tD} e^{ikx}\} \\ &= \int dx \int d\tilde{k} \text{Tr}_{V_x} \{f(x) e^{-tk^2} e^{t(2ik^\mu \nabla_\mu + \nabla^2 + E)}\}. \end{aligned}$$

Conviene notar, en primer lugar, que en la última línea de esta ecuación el operador diferencial ∇_μ actúa solo sobre E . En segundo lugar, que hemos separado la exponencial en dos términos, con la intención de desarrollar en serie aquel que contiene derivadas; el resultado que obtendríamos sería un polinomio en t y en k donde, debido a la presencia de la exponencial e^{-tk^2} , cada factor k sería del orden de \sqrt{t} luego de realizar la integral correspondiente.

⁸Esta base resulta conveniente para \mathbb{R}^d . En general, podrá utilizarse este método para otras variedades eligiendo la base más adecuada al problema.

Siguiendo ese plan y utilizando la notación $\nabla_{\mu_1} \cdots \nabla_{\mu_n} f = f_{;\mu_1 \cdots \mu_n}$, el resultado que se obtiene para el desarrollo del núcleo de calor es

(III.A.4)

$$K(f; t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int dx \text{Tr}_{V_x} \left\{ f(x) \left(1 + tE + t^2 \left(\frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{6} E_{;\mu\mu} + \frac{1}{12} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \right) + O(t^3) \right) \right\}.$$

De esta ecuación se pueden leer los primeros coeficientes del desarrollo

$$\begin{aligned} a_0(f, D) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \text{Tr}_{V_x} \{f\}, \\ \text{(III.A.5)} \quad a_2(f, D) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \text{Tr}_{V_x} \{f E\}, \\ a_4(f, D) &= \frac{1}{12(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \text{Tr}_{V_x} \{f(2 E_{;kk} + 6 E^2 + \Omega_{ij} \Omega_{ij})\}. \end{aligned}$$

Dado que \mathbb{R}^d es una variedad plana, si tomáramos una variedad Riemanniana arbitraria deberíamos agregar a estos coeficientes contribuciones provenientes de términos que involucraran el tensor de curvatura.

CAPÍTULO 4

Formalismo de línea de mundo

*Un'ansia inconsueta da qualche tempo
si accende in me alla sera, e non è
più rimpianto delle gioie lasciate, come
accadeva nei primi tempi del viaggio;
piuttosto è l'impazienza di conoscere le
terre ignote a cui mi dirigo.*

– D. BUZZATTI, *I Sette Messaggeri*.

El análisis perturbativo de cantidades físicas en TCC suele portar indefectiblemente a la construcción y posterior cálculo de diagramas de Feynman. El principal problema que esto acarrea es de cómputo: hay un veloz incremento en el número de diagramas relevantes al aumentar el orden de la perturbación en las correcciones cuánticas o el número de partículas involucradas en el proceso de dispersión. No obstante, en muchas teorías los diversos diagramas aportan contribuciones que se cancelan entre ellas y dan lugar a un resultado final simplificado.

El FLM es un método eficiente para realizar el cálculo de acciones efectivas, amplitudes de dispersión y anomalías en TCC que explica algunas de esas cancelaciones y muestra varias ventajas conceptuales y prácticas respecto al método diagramático (Bastianelli y van Nieuwenhuizen 2006, Schubert 2001). En la sección 1.4 hemos ya mencionado diversas aplicaciones en las cuales ha demostrado su eficiencia.

A grandes rasgos, las técnicas del FLM pueden ser utilizadas para estudiar el NdC de diversos operadores diferenciales y, en consecuencia, permiten el análisis del determinante funcional del operador diferencial que describe las fluctuaciones cuánticas en TCC. El operador en cuestión, el cual se obtiene tomando la variación segunda de la acción clásica, en general se trata de un operador diferencial local cuyos coeficientes de Seeley-De Witt (SDW), coeficientes de la expansión asintótica (para pequeños valores del tiempo propio) de la traza del NdC del operador, han sido en muchos casos estudiados.

En particular, como veremos en este capítulo para el caso de campos escalares, el FLM nos permite determinar, a través del cálculo intermedio de coeficientes de SDW, cantidades a 1 bucle en TCC utilizando

las integrales de camino de R. Feynman. Tan pronto hayamos introducido el formalismo, consideraremos el caso general de potenciales regulares. Esto, sumado a los métodos desarrollados en la sección 2.3 para la renormalización implementada en términos de técnicas espectrales, permitirá concentrarnos en el análisis de la renormalizabilidad del modelo $\lambda\phi^4$.

Para concluir, mostraremos cómo el FLM puede ser utilizado incluso en el estudio de potenciales singulares tipo delta de Dirac. Esta clase de potenciales se asocia a bordes semitransparentes, los cuales imponen particulares condiciones de contorno a los campos. Como es usual, es posible investigar la dependencia de la energía efectiva (cfr. 2.4.1) ante geometrías con este tipo de bordes; el ejemplo del que nos ocuparemos es la configuración de dos placas paralelas.

Vale decir que todas las técnicas desarrolladas a lo largo de este capítulo, junto a los ejemplos que analizamos, tienen como objetivo preparar el recorrido para la generalización del FLM a TCC no conmutativas, teorías que son propuestas como modelos efectivos de la gravedad cuántica. A ello nos dedicaremos a partir del capítulo 5.

4.1. Formalismo de línea de mundo para campos escalares

Consideremos un campo escalar φ real, masivo y autointeractuante a través de un potencial $U(\varphi)$, definido sobre un espacio euclídeo de d dimensiones. Como hemos visto en la sección 2.2, la corrección a un bucle de la AE está dada por¹

$$(IV.1.1) \quad \Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \text{Tr} e^{-\beta A},$$

la integral de la traza del NdC de $A = -\Delta + m^2 + U''(\phi)$, el operador de fluctuaciones cuánticas evaluado en el valor de expectación de vacío $\langle\varphi\rangle = \phi$. Esta traza puede ser escrita explícitamente sobre el espacio de coordenadas x utilizando la notación de Dirac, resultando

$$(IV.1.2) \quad \Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \int d^d x \langle x | e^{-\beta(-\Delta+m^2+U''(\phi))} | x \rangle.$$

Llegados a este punto, podemos notar un aspecto clave del FLM: el integrando de (IV.1.2) puede ser asociado a una amplitud de transición en mecánica cuántica no relativista. En efecto, supongamos que estuviéramos estudiando el comportamiento de una partícula de masa m'

¹La ecuación (II.2.17) posee además un término que corresponde al núcleo de calor de una partícula libre, proveniente de la normalización de la funcional generatriz $Z[J]$. Por economía en la escritura, salvo mención contraria, omitiremos este término.

cuya evolución fuera dictada por el hamiltoniano H , correspondiente a un potencial V independiente del tiempo. En ese caso, la amplitud de transición $K(x', x'', it)$ desde la posición x' hasta x'' , en un intervalo de tiempo t , estaría dada por

$$(IV.1.3) \quad K(x', x'', it) := \langle x'' | e^{-itH} | x' \rangle = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x''} \mathcal{D}x(\tau) e^{i \int_0^t d\tau \left(\frac{m'}{2} \dot{x}^2 - V(x(\tau)) \right)},$$

al expresarla como una integral de camino de Feynman². Comparando las expresiones (IV.1.2) y (IV.1.3), es inmediato realizar las correspondencias

$$(IV.1.4) \quad \begin{cases} H & \rightarrow p^2 + m^2 + U''(\phi(x)) \\ t & \rightarrow -i\beta \\ m' & \rightarrow \frac{1}{2} \\ x', x'' & \rightarrow x \end{cases}$$

En resumen, notando que el exponente en la integral de camino (IV.1.3) es el lagrangiano de la partícula imaginaria, la contribución de un bucle a la AE puede ser escrita como la fórmula maestra del FLM,

$$(IV.1.5) \quad \Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \int d^d x \int_{x(0)=x}^{x(\beta)=x} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2 + m^2 + U''(\phi(x(\tau))) \right)}.$$

Equivalentemente, la suma sobre todas las trayectorias cerradas puede ser tomada en cuenta eligiendo en la integral de caminos la medida asociada a trayectorias periódicas³:

$$(IV.1.6) \quad \Gamma_{1\text{-bucle}}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \int_{x(0)=x(\beta)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2 + m^2 + U''(\phi(x(\tau))) \right)}.$$

²Si el hamiltoniano estuviera definido a valores matriciales uno debería tener la precaución de ordenar temporalmente el integrando de la IdC para obtener los resultados correctos (Bastianelli y Nieuwenhuizen 1993). En los casos que analizaremos será irrelevante la introducción de dicho ordenamiento.

³El cálculo de la traza del NdC involucra una integral sobre el ET; ya sea sobre el punto de intersección de las trayectorias, en el caso de condiciones Dirichlet, o sobre el modo cero (o modo centro de masa) de $-\partial_t^2$, para caminos periódicos, el resultado es el mismo. Sin embargo, en geometrías curvas han sido encontradas discrepancias entre ambos enfoques al momento de calcular cantidades locales; el problema radica en que las coordenadas de centro de masa pueden no ser covariantes (Schalm y van Nieuwenhuizen 1999).

Las ventajas de utilizar (IV.1.5) o (IV.1.6) respecto a la otra varían con el modelo en consideración. En lo sucesivo veremos cómo aplicar concretamente estas fórmulas a diversos ejemplos.

4.2. Coeficientes de Seeley-DeWitt para un potencial regular

Dado un operador del tipo laplaciano $A = -\Delta + V(x)$ en \mathbb{R}^d , el cual podría asociarse a las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar interactuante con el potencial de fondo $V(x)$ o autointeractuante con un potencial $U(\varphi(x))$ tal que $\delta_\phi^2 U = V(x)$, la traza de su NdC puede ser escrita, utilizando el FLM, como

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-\beta A} &= \int d^d x K(x, x, \beta) \\ (IV.2.1) \quad &= \int d^d x \int_{x(0)=x(\beta)=x} \mathcal{D}' x(\tau) e^{-\int_0^\beta d\tau (\frac{1}{4} \dot{x}^2 + V(x(\tau)))}. \end{aligned}$$

A modo de primer ejemplo sobre la aplicación de (IV.2.1), determinaremos los coeficientes de SDW para el caso de un potencial $V(x)$ al que requeriremos ciertas condiciones de regularidad.

Para ello, centraremos en un primer momento nuestra atención sobre el NdC. Visto que obtener los coeficientes de SDW es al fin y al cabo obtener un desarrollo válido para valores pequeños del tiempo propio β , conviene realizar como primer paso un reescalo en la variable de integración temporal, de forma que

$$(IV.2.2) \quad K(x, x', \beta) = \int_{x(0)=x}^{x(1)=x'} \mathcal{D} x(\tau) e^{-\int_0^1 d\tau (\frac{1}{4\beta} \dot{x}^2 + \beta V(x(\tau)))}.$$

El cambio de escala acarrea la aparición de un factor dependiente de β en la medida de la integral de camino. Desconocer la forma precisa de este factor no traerá mayores inconvenientes pues la normalización será posteriormente determinada comparando el resultado con el NdC de una partícula libre, cuyo valor es conocido⁴.

De (IV.2.2) resulta inmediato que el desarrollo para pequeños tiempos β será compatible con una expansión en potencias de V , en cuanto, pensada como una TCC en 0+1 dimensiones, el propagador es proporcional a β , la constante de acoplamiento del potencial es justamente el tiempo propio, y el desarrollo en potencias de V no es más que el

⁴Otro camino posible es analizar el efecto de la modificación de la escala en la medida de integración.

desarrollo en el número de bucles:

(IV.2.3)

$$K(x, x', \beta) = \int_{x(0)=x}^{x(1)=x'} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^1 d\tau \frac{1}{4\beta} \dot{x}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \left(\int_0^1 d\tau V(x(\tau)) \right)^n.$$

Una forma natural de proseguir es expandiendo $x(\tau)$ alrededor de la trayectoria clásica (correspondiente a $V \equiv 0$) e introduciendo las fluctuaciones cuánticas $\varphi(\tau) \in \mathbb{R}^d$ a través de sus componentes $\varphi_\mu(\tau)$:

$$(IV.2.4) \quad x_\mu(\tau) =: t(x' - x)_\mu + x_\mu + \varphi_\mu(\tau).$$

Recalquemos un aspecto que pronto será clave: a diferencia de los caminos $x(\tau)$, las fluctuaciones $\varphi(\tau)$ satisfacen condiciones Dirichlet en $\tau = 0$ y $\tau = 1$. Realizando esta traslación en la IdC, integral cuya medida de integración no se ve afectada, obtenemos

(IV.2.5)

$$\begin{aligned} K(x, x', \beta) &= e^{-\frac{(x-x')^2}{4\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{\varphi}^2(t')/4\beta} \\ &\quad \times \left[\int_0^1 dt V((x-x')t + x' + \varphi(t)) \right]^n \\ &= e^{-\frac{(x-x')^2}{4\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \left\langle \left(\int_0^1 dt V((x-x')t + x' + \varphi(t)) \right)^n \right\rangle_D \\ &\quad \times \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{\varphi}^2(t')/4\beta}. \end{aligned}$$

En la última ecuación hemos utilizado la siguiente notación, tomada prestada de la mecánica estadística, para el valor medio de una función arbitraria de los campos $\varphi(\tau)$ con una medida gaussiana dada por el cociente de integrales de caminos

$$(IV.2.6) \quad \langle f[\varphi(t)] \rangle_D := \frac{\int_{\varphi(0)=\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{\varphi}^2(t')/4\beta} f[\varphi(t)]}{\int_{\varphi(0)=\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{\varphi}^2(t')/4\beta}},$$

De la definición resulta trivial la igualdad $\langle 1 \rangle = 1$.

Este es un punto adecuado para dedicarnos a un aspecto que hemos dejado de lado hasta el momento: la normalización de la integral de caminos. Notemos que, al tomar $V \equiv 0$, la expresión (IV.2.5) se reduce al NdC $K_0(x, x', \beta)$ de una partícula libre en la primera cuantización, también asociado al problema del flujo del calor. Su forma exacta puede obtenerse aprovechando su interpretación como amplitud de transición e introduciendo la relación de completitud en la base de estados de momento definido, ya que en ella el hamiltoniano asociado resulta diagonal; el resultado es

$$(IV.2.7) \quad K_0(x, x', \beta) = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\beta}}}{(4\pi\beta)^{d/2}}.$$

Una comparación directa de (IV.2.5) con (IV.2.7) nos permite elegir la normalización

$$(IV.2.8) \quad \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \varphi^2(t')/4\beta} := \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}}.$$

Luego de esta breve digresión sobre la notación y la normalización de la integral de camino, podemos proseguir con el estudio de (IV.2.5). Una de las alternativas para explotar las condiciones de regularidad del potencial V , es realizar un desarrollo en términos de las fluctuaciones φ y los incrementos en la posición $(x - x')$. En tal caso, las contribuciones de los términos correspondientes a $n = 0, 1, 2$ en (IV.2.5) son⁵

$$(IV.2.9) \quad \begin{aligned} K(x, x', \beta) = & \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\beta}}}{(4\pi\beta)^{d/2}} \left\{ \langle 1 \rangle_D - \beta V(x') \int_0^1 dt \langle 1 \rangle_D \right. \\ & - \beta \partial_\mu V(x') \int_0^1 dt [(x - x')^\mu t \langle 1 \rangle_D + \langle \varphi^\mu(t) \rangle_D] \\ & - \frac{\beta}{2} \partial_{\mu\nu}^2 V(x') \int_0^1 dt \langle [(x - x') t + \varphi(t)]^\mu [(x - x') t + \varphi(t)]^\nu \rangle_D \\ & \left. - \dots + \frac{\beta^2}{2} V^2(x') \int_0^1 \int_0^1 dt dt' \langle 1 \rangle_D + \dots \right\}. \end{aligned}$$

⁵La elección de los términos que figuran en (IV.2.9) puede parecer a primera vista arbitraria; no obstante, responde a un desarrollo a orden β^2 . Para convencerse, basta observar que ante la presencia del factor exponencial, la variable x^μ es del orden de $\sqrt{\beta}$ al ser integrada.

Es claro que hemos reducido el problema al cálculo de funciones de transición de n puntos, a saber, valores medios de expectación del producto de n campos φ . Como hemos aprendido de TCC, una forma elegante de tratar con estas cantidades es a través de la funcional generatriz (FG) $Z_D[j]$, definida por la ecuación

$$(IV.2.10) \quad Z_D[j] := \frac{\int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \{ \dot{\varphi}^2(t')/4\beta - j(t')\varphi(t') \}}}{\int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(1)=0} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \{ \dot{\varphi}^2(t')/4\beta \}}}$$

$$= e^{\beta \int_0^1 dt j(t) ((-\partial^2)_D^{-1} j)(t)}.$$

Para utilizar esta expresión, obtenida completando cuadrados en la funcional cuadrática en φ , debemos encontrar el operador integral $(\partial^2)_D^{-1}$, el cual actúa sobre cada componente del vector fuente j como el inverso del operador de Sturm-Liouville ∂^2 en una dimensión con condiciones de contorno Dirichlet; la solución a este problema es harto conocida y está dada por la función de Green simétrica

$$(IV.2.11) \quad g(t, t') = \begin{cases} t(1-t') & \text{si } t < t' \\ t'(1-t) & \text{si } t > t' \end{cases}.$$

Al respecto conviene hacer una aclaración: ¿qué habría sucedido en caso de que hubiéramos trabajado con la IdC en términos de trayectorias con condiciones de contorno periódicas en lugar de las tipo Dirichlet? El operador $(\partial^2)_{per}^{-1}$ involucrado habría tenido modos cero (las trayectorias constantes) y no habría sido invertible. Por supuesto, ello se podría remediar separando el modo cero, una alternativa un poco más laboriosa que la elegida.

Retornando a la expresión (IV.2.10) para la FG, su ventaja operativa consiste en que, derivadas funcionales por medio, permite conocer cualquier función de transición de n puntos computando

$$(IV.2.12) \quad \langle \varphi_{i_1}(t_1) \dots \varphi_{i_n}(t_n) \rangle_D := \frac{\delta}{\delta j_{\mu_1}(t_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j_{\mu_n}(t_n)} Z_D[j] \Big|_{j \equiv 0}.$$

A modo de ejemplo, reuniendo las ecuaciones (IV.2.12) y (IV.2.10), podemos calcular las cantidades

$$(IV.2.13) \quad \langle \varphi_\mu(t) \rangle_D = 0,$$

$$\langle \varphi_\mu(t) \varphi_\nu(t') \rangle_D = \delta_{\mu\nu} 2\beta \begin{cases} t(1-t') & \text{si } t < t' \\ t'(1-t) & \text{si } t > t' \end{cases},$$

utilizando la delta de Kronecker $\delta_{\mu\nu}$. De esto resulta inmediato reconocer que el cálculo de los valores medios de la ecuación (IV.2.9), si bien puede resultar trabajoso, es directo. Es así que, valiéndonos de (IV.2.13), encontramos el siguiente resultado para la expansión del NdC en términos de los incrementos $\delta_\mu := x_\mu - x'_\mu$ y el tiempo propio β :

(IV.2.14)

$$\begin{aligned}
K(x, x', \beta) = & \\
= & \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4\beta}}}{(4\pi\beta)^{d/2}} \left\{ 1 - \beta V \mp \frac{\beta}{2} \partial_\mu V \cdot \delta^\mu + \frac{\beta^2}{2} \left(-\frac{1}{3} \Delta V + V^2 \right) \right. \\
& - \frac{\beta}{6} \partial_{\mu\nu}^2 V \cdot \delta^\mu \delta^\nu \pm \frac{\beta^2}{2} \left(-\frac{1}{6} \partial_\mu \Delta V + V \partial_\mu V \right) \cdot \delta^\mu \mp \frac{\beta}{24} \partial_{\mu\nu\rho}^3 V \cdot \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \\
& + \frac{\beta^3}{6} \left(-\frac{1}{10} \Delta \Delta V + V \Delta V + \frac{1}{2} \partial^\mu V \partial_\mu V - V^3 \right) \\
& + \frac{\beta^2}{2} \left(-\frac{1}{20} \partial_{\mu\nu}^2 \Delta V + \frac{1}{3} V \partial_{\mu\nu}^2 V + \frac{1}{4} \partial_\mu V \partial_\nu V \right) \cdot \delta^\mu \delta^\nu \\
& \left. - \frac{\beta}{120} \partial_{\mu\nu\rho\sigma}^4 V \cdot \delta^\mu \delta^\nu \delta^\rho \delta^\sigma + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

En esta expresión, los signos superior e inferior corresponden al caso en el que el desarrollo del potencial es alrededor del punto inicial (x') o final (x), respectivamente. Por otro lado, el prefactor exponencial implica que al realizar la integral del NdC en la variable x , cada factor δ_i dará una contribución de orden $\beta^{1/2}$. Como consecuencia, los puntos en la expresión (IV.2.14) indican contribuciones de orden $\beta^{7/2}$.

Más allá que el NdC posea información adicional tanto a nivel matemático como físico, la ecuación (IV.2.1) requiere únicamente el desarrollo para tiempo propio pequeño de la traza del NdC. Tomando lo que se conoce como la diagonal del NdC, es decir $x_\mu = x'_\mu$ o $\delta_\mu = 0$ en (IV.2.14), llegamos a la expresión

(IV.2.15)

$$\begin{aligned}
K(x, x, \beta) = & \\
= & \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \left\{ 1 - \beta V + \frac{\beta^2}{2} \left(-\frac{1}{3} \Delta V + V^2 \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{\beta^3}{6} \left(-\frac{1}{10} \Delta \Delta V + V \Delta V + \frac{1}{2} \partial_\mu V \partial^\mu V - V^3 \right) + O(\beta^4) \Big\} ,$$

donde el potencial y sus derivadas están evaluados en x . Finalmente, de acuerdo a las expresiones (III.2.7) y (IV.2.1), basta solo integrar (IV.2.15) en $x \in \mathbb{R}^d$ para obtener los primeros coeficientes de SDW

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} 1 , \\ a_2 &= -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} V(x) , \\ (IV.2.16) \quad a_4 &= \frac{1}{6 (4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left[-\Delta V(x) + 3 V^2(x) \right] , \\ a_6 &= \frac{1}{60 (4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left[-\Delta \Delta V(x) + 10 V(x) \Delta V(x) \right. \\ &\quad \left. + 5 \partial_\mu V(x) \partial^\mu V(x) - 10 V^3(x) \right] , \\ a_1 &= a_3 = a_5 = 0 . \end{aligned}$$

A modo de verificación, constatamos que este desarrollo cumple con los teoremas detallados en la sección 3: los coeficientes son integrales de productos del potencial y sus derivadas, y, puesto que la variedad de base \mathbb{R}^d no posee borde, el desarrollo asintótico de la traza del NdC contiene solamente potencias enteras de β . Adicionalmente, está de acuerdo con (III.A.5) si identificamos $E \equiv -V$, $\Omega_{ij} = 0$ y $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu$.

4.3. Renormalización a un bucle del modelo $\lambda\varphi^4$

Como aplicación de los resultados obtenidos en la sección anterior a un modelo físico sencillo y de importancia, consideraremos la renormalización de un campo cuántico φ , escalar, real y masivo, cuyo comportamiento en un espacio euclídeo de d dimensiones se encuentra regido por la densidad Lagrangiana

$$(IV.3.1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 .$$

En el capítulo 2 hemos demostrado que la corrección de un bucle a la AE y la posterior renormalización de la teoría está determinada por el operador de fluctuaciones cuánticas A o, para ser precisos, por la integral de Schwinger (II.2.17) del NdC de A , la cual en cierto desarrollo involucra los coeficientes de SDW. El cálculo de $A = B + m^2$ en este

modelo arroja el resultado

$$(IV.3.2) \quad A = \delta^2 S = -\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2,$$

el cual permite identificar el potencial⁶ $V(x) = \frac{\lambda}{2}\phi^2(x)$, dependiente del campo medio $\phi(x)$, y utilizar la fórmula (IV.2.16) para la determinación de los primeros coeficientes de SDW de B :

$$(IV.3.3) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} 1, \\ a_2 &= -\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^2(x), \\ a_4 &= \frac{\lambda^2}{8(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \phi^4(x), \\ a_6 &= \frac{\lambda^2}{48(4\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (\phi^2 \triangle \phi^2 - \lambda \phi^6(x)) . \end{aligned}$$

Recordemos que la ecuación (II.3.2) muestra que, si las hubiere, las contribuciones divergentes a la AE de orden un bucle son un número finito y provienen de los primeros términos del desarrollo del NdC para tiempo propio pequeño. Tomemos por caso $d = 4$: los términos divergentes de la AE son tres, y su dependencia funcional en el campo clásico ϕ está dada por los coeficientes a_n , con $n = 0, 2, 4$. Debido a la naturaleza de las divergencias resulta conveniente estudiar cada una de las contribuciones por separado.

La primera, aquella proporcional a a_0 , se trata de una contribución de vacío, puesto que no involucra el potencial. Si agregáramos el término asociado al propagador G^{-1} , tal y como lo dicta (II.2.15), esta contribución no se presentaría.

Por otro lado, el término correspondiente a a_2 tiene una dependencia funcional en ϕ idéntica a la del término de masa. En términos de diagramas de Feynman, está asociado al diagrama de renacuajo, cfr. (I.2.1). Efectivamente, al orden de un bucle y según (II.3.2), el término de la AE cuadrático en los campos es⁷

$$(IV.3.4) \quad \Gamma^{(2)} = \int dx \left(m^2 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \Gamma \left(-1, \frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right) \phi^2(x).$$

⁶La presencia de la masa contribuye un factor $e^{-\beta m^2}$ que puede ser factorizado en el cálculo del núcleo de calor.

⁷Dado que todos los resultados enunciados a continuación corresponden al orden de un bucle, omitiremos la inclusión del subíndice “1 – bucle” en lo que resta de la sección.

Si utilizamos la prescripción de mínima sustracción para renormalizar, explicado en la sección 2.3, encontramos la masa renormalizada

$$(IV.3.5) \quad m_R^2 = m^2 \left[1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + \log \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right) \right],$$

puesto que el desarrollo de $\Gamma(-1, x)$ para pequeños valores de x resulta

$$(IV.3.6) \quad \Gamma(-1, x) = \frac{1}{x} + \log x + O(x^0).$$

Por último, aún nos resta analizar la contribución divergente que involucra al coeficiente a_4 . Esta es proporcional a la potencia cuarta de ϕ , al igual que el potencial de interacción; reuniendo ambos términos la función de cuatro puntos $\Gamma^{(4)}$, puede escribirse como

$$(IV.3.7) \quad \Gamma^{(4)} = \frac{\lambda}{4!} \int dx \left(1 - \frac{3}{32\pi^2} \lambda \Gamma \left(0, \frac{m^2}{\Lambda^2} \right) \right) \phi^4(x).$$

Empleando nuevamente la prescripción de mínima sustracción, encontramos que la constante de acoplamiento renormalizada λ_R posee el desarrollo

$$(IV.3.8) \quad \lambda_R = \lambda \left(1 + \frac{3}{32\pi^2} \lambda \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + \dots \right)$$

A partir de (IV.3.8) se puede calcular la función β de la constante de acoplamiento (desnuda), con el fin de estudiar su comportamiento con la escala de energía Λ :

$$(IV.3.9) \quad \beta(\lambda) = \Lambda \partial_\Lambda \lambda|_{\lambda_R} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2.$$

Por cuanto $\lambda^2 > 0$, la constante de acoplamiento resulta ser una función creciente de Λ , al menos al orden de un bucle. Si este fuera su comportamiento a todo orden podría acarrear problemas en el desarrollo perturbativo en potencias de λ que hemos propuesto para la AE. En particular, se puede resolver la ecuación diferencial (IV.3.9) para obtener

$$(IV.3.10) \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0 \log(\frac{\Lambda}{\Lambda_0})},$$

donde λ_0 es el valor de la constante de acoplamiento para una escala de energía Λ_0 . Esta fórmula muestra que, partiendo de un valor pequeño para la constante de acoplamiento, el flujo es tal que al aumentar la escala de energía el denominador se anula y la expresión diverge para una escala de energía

$$(IV.3.11) \quad \Lambda = \Lambda_0 e^{\frac{16\pi^2}{3\lambda_0}}.$$

Este inconveniente es llamado polo o fantasma de Landau, en reconocimiento al físico ruso cuyo grupo de trabajo encontró un comportamiento similar en la teoría de la electrodinámica cuántica. Un problema relacionado es el de la trivialidad cuántica: para eliminar la inconsistencia de este polo, la única solución posible es la elección $\lambda_0 = 0$, la teoría trivial sin potencial. Si bien estos cálculos corresponden solo al orden de un bucle, hay varios resultados analíticos y numéricos a órdenes superiores que sugieren la presencia de este comportamiento en el modelo $\lambda\phi^4$ en 4 dimensiones (Frohlich 1982, Suslov 2008, Wolff 2009).

Con estas consideraciones damos por concluido el estudio de potenciales regulares. En la próxima sección, veremos cómo generalizar el método al caso en el que el potencial es una delta de Dirac. Siguiendo ciegamente el mismo procedimiento, al intentar hacer el desarrollo del potencial alrededor del punto inicial x' en la ecuación (IV.2.9), obtendríamos el producto mal definido de deltas de Dirac y sus derivadas evaluadas todas en el mismo punto x' . Afortunadamente, encontraremos una forma de ladear este problema.

4.4. Núcleo de calor para un potencial tipo delta de Dirac

Vistas las aplicaciones exitosas del FLM a diversos problemas en TCC, existe un creciente interés en extender estas técnicas para estudiar la influencia de diferentes condiciones externas en la AE de campos cuánticos. Recientemente se ha comenzado a construir una generalización sistemática del FLM en variedades con borde, comenzando con el cálculo del desarrollo asintótico del NdC de un campo escalar en diversas variedades chatas con borde (Bastianelli *et al.* 2009, Bastianelli, Corradini y P. A. G. Pisani 2007, 2008, Bastianelli *et al.* 2008). Por otro lado, la delta de Dirac con soporte en una superficie de codimensión uno es un problema matemático bien definido (Albeverio *et al.* 1988) y ha sido utilizada para modelar diversos sistemas físicos. De todos ellos, se mencionará sobre el comienzo del próximo párrafo su aplicación al estudio de láminas de plasma (Bordag 2006). Como motivación adicional, investigaciones más recientes (Falomir, Muschietti *et al.* 2003, Falomir y P. Pisani 2006, Falomir, P. Pisani y Wipf 2002, Kirsten *et al.* 2008) han establecido que en presencia de singularidades en el espacio-tiempo o en los coeficientes del operador diferencial la estructura del desarrollo asintótico del heat-kernel cambia sustancialmente.

En esta sección mostraremos que el FLM puede ser aplicado al estudio de campos escalares con condiciones de pegado sobre una superficie de codimensión uno, condiciones que son impuestas por un potencial tipo delta de Dirac con soporte en dicha superficie y reciben el nombre

de borde semitransparentes. Estos resultados nos permitirán analizar, en la sección 4.4.1, la energía efectiva y la fuerza de Casimir en una configuración de placas paralelas con acoplamientos pequeños.

Para comenzar, analizaremos el desarrollo asintótico de la traza del NdC de un operador A_γ tipo Schrödinger, cuyo potencial contiene una delta de Dirac con soporte en el hiperplano $x_1 = 0$ de \mathbb{R}^{d+1} , i.e.

$$(IV.4.1) \quad A_\gamma = -\Delta + V(x) + \gamma\delta(x_1).$$

Supondremos además que $V(x)$ es un potencial regular y $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Por convención, llamaremos $y \in \mathbb{R}^d$ a las coordenadas sobre el hiperplano $x_1 = 0$. Este operador describe las fluctuaciones cuánticas de un campo escalar en un espacio euclídeo $d+1$ dimensional y en interacción con un potencial de fondo que es la suma de uno regular (V) y uno altamente localizado (la delta de Dirac).

De acuerdo a la ecuación (IV.2.2) la diagonal del NdC de A_γ se puede escribir como

$$(IV.4.2) \quad K_\gamma(x, x, \beta) = \int_{\substack{x(0)=x \\ x(1)=x}} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^1 dt' [\dot{x}^2(t')/4\beta + \beta V(x(t')) + \beta \gamma \delta[x_1(t')]]}.$$

Dado que ya hemos mostrado cómo se puede obtener el desarrollo para un potencial regular en el apartado 4.2, no nos ocuparemos del factor que involucra V y desarrollaremos en serie sólo la exponencial de la parte singular, para obtener

$$(IV.4.3) \quad K_\gamma(x, x, \beta) - K_0(x, x, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta \gamma)^n}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 dt_1 \cdots dt_n \times \int_{\substack{x(0)=x \\ x(1)=x}} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^1 dt' [\dot{x}^2(t')/4\beta + \beta V(x(t'))]} \delta[x_1(t_1)] \cdots \delta[x_1(t_n)].$$

En esta expresión hemos sustraído la contribución de $K_0(x, x, \beta)$, el NdC correspondiente a $\gamma = 0$, para el cual se pueden utilizar los resultados precedentes.

Llegados a este punto, es claro que no se puede realizar la expansión de las deltas de Dirac alrededor de la posición inicial: en caso de hacerlo obtendríamos un producto de deltas y sus derivadas todas con el mismo soporte. En cambio, sí podemos interpretar estas integrales de camino

como amplitudes de transición para una partícula bajo la acción del potencial regular V , sometida a las restricciones que imponen las deltas.

En otras palabras, la presencia de las deltas en el n -ésimo término de la ec. (IV.4.3) implica que a la integral de caminos sólo contribuirán aquellas trayectorias cerradas que comienzan y terminan en el punto x , y adicionalmente tocan la superficie $x_1 = 0$ (el soporte de la función delta) en cada uno de los tiempos t_1, \dots, t_n . En consecuencia, cada una de las contribuciones con n deltas puede ser escrita como el producto de $n + 1$ funciones de transición que tengan en cuenta las condiciones impuestas sobre la coordenada x_1 :

(IV.4.4)

$$\begin{aligned}
K_\gamma(x, x, \beta) - K_0(x, x, \beta) = & \\
= \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta \gamma)^n \int_0^1 \cdots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dt_1 dt_2 \dots dt_n & \\
\times \int_{y(0)=y}^{y(1)=y} \mathcal{D}y(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{y}^2(t')/4\beta} & \\
\times \int_{x_1(t_n)=0}^{x_1(1)=x_1} \mathcal{D}x_1(\tau) e^{-\int_{t_n}^1 dt' [\dot{x}_1^2(t')/4\beta + \beta V(x(t'))]} & \\
\times \prod_{i=1}^{n-1} \int_{x_1(t_i)=0}^{x_1(t_{i+1})=0} \mathcal{D}x_1(\tau) e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt' [\dot{x}_1^2(t')/4\beta + \beta V(x(t'))]} & \\
\times \int_{x_1(0)=x_1}^{x_1(t_1)=0} \mathcal{D}x_1(\tau) e^{-\int_0^{t_1} dt' [\dot{x}_1^2(t')/4\beta + \beta V(x(t'))]} . &
\end{aligned}$$

Si consideramos una dada trayectoria $y(\tau)$ en las coordenadas paralelas al soporte de la delta, se puede observar de (IV.4.4) que cada una de las integrales de camino en la variable x_1 corresponde a un NdC en un espacio unidimensional con un potencial regular. Por consiguiente, no obstante la dependencia temporal que genera la trayectoria $y(\tau)$ en el argumento de los potenciales, estos NdC pueden ser calculados siguiendo un lineamiento análogo al detallado en la sección 4.2. Posteriormente, la integral en $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ proporcionaría el desarrollo deseado para la traza del NdC.

No obstante el método explicado carece de vericuetos, el cálculo resulta ser más eficiente realizando una pequeña variación: añadiremos factores en (IV.4.3) para trabajar con deltas que tengan soporte no en un hiperplano sino en un punto. Consecuentemente, introducimos por cada función $\delta(x_1(t_i))$ en la fórmula (IV.4.3) la integral en $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}^d$ de una función delta d -dimensional en las coordenadas y , es decir, un factor

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} dy_0^{(i)} \delta^{(d)}(y(t_i) - y_0^{(i)}).$$

Intercambiando las integrales en estas nuevas variables con las integrales de camino, podemos reinterpretar a las funciones delta como restricciones sobre los caminos, los cuales deberán pasar por el punto $x^{(i)} := x(t_i) = (0, y_0^{(i)})$ al tiempo t_i :

(IV.4.5)

$$\begin{aligned} K_\gamma(x, x, \beta) - K_0(x, x, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta \gamma)^n \int_0^1 \cdots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} dt_1 dt_2 \dots dt_n \\ &\times \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} dy^{(1)} \dots dy^{(n)} K(x, x^{(n)}, \beta(1-t_n)) \times \dots \times K(x^{(1)}, x, \beta t_1). \end{aligned}$$

El cálculo ahora resulta inmediato, puesto que cada uno de los NdC que componen (IV.4.5) puede desarrollarse de acuerdo a (IV.2.14).

Antes de obtener el resultado final vale la pena hacer el siguiente comentario a una posible objeción. Es sabido que una partícula en un espacio de $d + 1$ dimensiones bajo la acción de un potencial tipo delta con soporte en un punto da lugar a un hamiltoniano tipo Schrödinger mal definido, al cual corresponden las funciones de transición de la expresión (IV.4.5). Esto es consistente con el hecho de que en ausencia de las integrales en $y^{(j)}$ las integrales temporales resultan divergentes.

Retomando el camino que nos llevó a la fórmula (IV.4.5), luego de reemplazar los NdC por los desarrollos escritos según (IV.2.14) es posible integrar finalmente las variables $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ para obtener el desarrollo

asintótico para β pequeño de la traza del NdC de A_γ ,
(IV.4.6)

$$\begin{aligned} & \text{Tr } e^{-\beta A_\gamma} - \text{Tr } e^{-\beta A_0} = \\ &= \frac{\gamma}{(4\pi\beta)^{(d+1)/2}} \int d^d y \left\{ -\beta + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \gamma \beta^{3/2} + \left(V - \frac{1}{6} \gamma^2 \right) \beta^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{32} \gamma (8V - \gamma^2) \beta^{5/2} + \frac{1}{6} (\Delta V - 3V^2 + \gamma^2 V) \beta^3 + O(\beta^{7/2}) \right\}. \end{aligned}$$

En esta expresión A_0 denota el operador de Schrödinger regular dado por (IV.4.1) para el valor $\gamma = 0$ y, tal como hemos mencionado anteriormente, el desarrollo de la traza de su NdC ha sido obtenido en la sección 4.2.

Del desarrollo (IV.4.6), podemos inmediatamente leer las correcciones Δa_n que reciben los primeros coeficientes a_n de SDW debido a la presencia de un potencial tipo delta de Dirac sumado al potencial regular. Análogamente a lo que sucede en los casos en que la variedad de base posee un borde, la presencia del potencial tipo delta implica la aparición de términos de borde en el desarrollo de la traza del NdC. Las correcciones Δa_n a los coeficientes del caso regular, los cuales están dados por (IV.2.16) para n par y son nulos para n impar, se pueden escribir como

(IV.4.7)

$$\begin{aligned} \Delta a_0 &= -\frac{\gamma}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \int d^d y \, 1, \\ \Delta a_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4(4\pi)^{(d+1)/2}} \gamma^2 \int d^d y \, 1, \\ \Delta a_2 &= \frac{\gamma}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \int d^d y \left(V(0, y) - \frac{1}{6} \gamma^2 \right), \\ \Delta a_3 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{32(4\pi)^{(d+1)/2}} \int d^d y \, \gamma^2 (8V(0, y) - \gamma^2), \\ \Delta a_4 &= \frac{1}{6(4\pi)^{(d+1)/2}} \gamma \int d^d y \, (\Delta V(0, y) - 3V^2(0, y) + \gamma^2 V(0, y)). \end{aligned}$$

Los primeros cuatro coeficientes escritos en (IV.4.7) pueden ser obtenidos como un caso particular de los resultados de Bordag y Vassilevich (1999).

4.4.1. Fuerza de Casimir para condiciones de borde semitransparentes. Un aspecto interesante a analizar es la influencia

de las condiciones de contorno semitransparentes sobre los campos en TCC. En este párrafo determinaremos, utilizando el FLM, la energía efectiva y la correspondiente fuerza de Casimir⁸ para la configuración de dos láminas paralelas debido a las oscilaciones cuánticas de un campo escalar que se encuentra débilmente acoplado a dos potenciales tipo delta. Estos resultados pueden ser comparados con los obtenidos por Bordag, Hennig *et al.* (1992), quienes trabajaron con una expresión de la función de Green.

Cabe mencionar que no es la primera vez que el FLM se aplica al cálculo de energías efectivas y de Casimir: sobre todo en combinación con métodos de Monte Carlo ha permitido el estudio de diversas geometrías (Gies y Klingmuller 2006a,b,c, Gies, Langfeld *et al.* 2003), como así también el de interesantes comportamientos de la energía de Casimir con la temperatura (Klingmuller y Gies 2008, Weber y Gies 2010a,b).

Por su parte, las condiciones de borde semitransparentes recientemente han sido utilizadas para cuantizar los modos transversales eléctricos del campo electromagnético en la vecindad de densidades de carga localizadas (Barton 2004, 2005a,b, Bordag y Khusnutdinov 2008, Bordag 2006, 2007a,b, 2009, Bordag, Pirozhenko *et al.* 2005). Podemos citar, a modo de ejemplo, el caso de las moléculas grandes de carbono: la densidad electrónica de estas moléculas puede ser considerada como una lámina infinitamente delgada de plasma que impone condiciones de borde semitransparentes a los modos de oscilación cuánticos del campo electromagnético. Para pequeños valores de carga neta y corriente sobre la lámina, el problema se reduce a resolver la ecuación de onda con un potencial tipo delta de Dirac y su derivada con soporte en la lámina.

Consideremos entonces un campo escalar masivo $\varphi(x)$, definido en $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, y que interactúa con deltas de Dirac que imponen condiciones de contorno semitransparente en los hiperplanos $|x_1| = L/2$ de acuerdo a la siguiente acción:

$$(IV.4.8) \quad S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (\partial\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x) + \gamma [\delta(x_1 + L/2) + \delta(x_1 - L/2)] \varphi^2(x) .$$

⁸Es común dar a esta fuerza, derivada de la energía efectiva, el nombre de fuerza de Casimir, el mismo que se utiliza para la obtenida a partir de la energía de Casimir.

De las $d + 1$ coordenadas una corresponde al tiempo euclídeo, otra a la espacial que define la posición de las placas (x_1) y las restantes a las espaciales paralelas a dichas placas.

En este caso, el operador de fluctuaciones cuánticas posee como potencial la suma de dos deltas de Dirac. Sirviéndonos de (IV.2.2), la fórmula de partida del FLM, luego de factorizar las contribuciones del tiempo euclídeo y de las $d - 1$ coordenadas paralelas a las placas encontramos que el NdC en la diagonal está dado por

(IV.4.9)

$$K(x, x, \beta) = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} e^{-\beta m^2} \int_{x_1(0)=x_1}^{x_1(1)=x_1} \mathcal{D}x_1(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{x}_1^2(t')/4\beta} \\ \times e^{-\int_0^1 dt' \beta \gamma \delta [x_1(t') + L/2] + \beta \gamma \delta [x_1(t') - L/2]} .$$

Si tomamos como escala de referencia la distancia L entre las placas para definir las dimensiones de las constantes m , β y γ , podemos considerar el caso de acoplamiento pequeño $L\gamma \ll 1$ y desarrollar consecuentemente (IV.4.9):

(IV.4.10)

$$K(x, x, \beta) = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} e^{-\beta m^2} \int_{x_1(0)=x_1}^{x_1(1)=x_1} \mathcal{D}x_1(\tau) e^{-\int_0^1 dt' \dot{x}_1^2(t')/4\beta} \\ \times \left\{ 1 - \beta \gamma \int_0^1 dt \delta [x_1(t) + L/2] - \beta \gamma \int_0^1 dt \delta [x_1(t) - L/2] + \right. \\ \left. + \beta^2 \gamma^2 \int_0^1 \int_0^1 ds dt \delta [x_1(s) + L/2] \delta [x_1(t) - L/2] + \dots \right\} .$$

En esta expresión, el primer término corresponde a la densidad de energía constante del espacio vacío. El segundo y el tercero, en cambio, contribuyen a la autoenergía de cada placa y ciertamente son independientes de la distancia L entre ellas. Es por ello que la contribución principal a la energía de interacción entre las láminas viene dada por el cuarto término y es orden γ^2 . Llamando $K_L(x, x, \beta)$ a esta contribución, podemos seguir mutatis mutandis el método de la sección 4.4

para deshacernos de las deltas:

(IV.4.11)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} dx K_L(x, x, \beta) &:= \frac{2T A_{d-1}}{(4\pi\beta)^{d/2}} e^{-\beta m^2} \beta^2 \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_0^1 \int_0^t ds dt \\ &\times K_0(-L/2, x, \beta s) \times K_0(L/2, -L/2, \beta(t-s)) \times K_0(x, L/2, \beta(1-t)) . \end{aligned}$$

Las amplitudes de transición K_0 pertenecen a partículas libres, pues el campo no interactúa más que con las deltas. Su expresión cerrada la hemos escrito en (IV.2.7) y nos permite calcular

(IV.4.12)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} dx K_L(x, x, \beta) &= \\ &= \frac{T A_{d-1}}{(4\pi\beta)^{d/2}} e^{-\beta m^2} 2\beta^2 \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} dx_1 \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^t ds dt \frac{e^{-(x_1+L/2)^2/4\beta s}}{\sqrt{4\pi\beta s}} \frac{e^{-L^2/4\beta(t-s)}}{\sqrt{4\pi\beta(t-s)}} \frac{e^{-(x_1-L/2)^2/4\beta(1-t)}}{\sqrt{4\pi\beta(1-t)}} \\ &= \frac{T A_{d-1}}{(4\pi\beta)^{d/2}} \frac{\beta \gamma^2}{4} e^{-\beta m^2} \operatorname{erfc}(L/\sqrt{\beta}) . \end{aligned}$$

En este resultado, T representa la longitud infinita del intervalo de tiempo euclídeo, A_{d-1} es la superficie también infinita de las láminas y $\operatorname{erfc}(\cdot)$ es la función error complementaria.

Teniendo en cuenta que la energía efectiva por unidad de área de las láminas, de acuerdo a lo expuesto en la sección 2.4.1, está definida utilizando la corrección $\Gamma_{1-\text{bucle}}$ de un bucle a la AE como

$$E_{\text{eff}} := \Gamma_{1-\text{bucle}}/T A_{d-1},$$

y recordando la expresión (IV.1.5) para $\Gamma_{1-\text{bucle}}$, la densidad de energía de interacción entre las placas por unidad de área debida a las oscilaciones de vacío del campo escalar es

$$\begin{aligned} (IV.4.13) \quad E_{\text{eff}} &= -\frac{1}{T A_{d-1}} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} dx K_L(x, x, \beta) \\ &= -\frac{\gamma^2}{4} \int_0^\infty d\beta \frac{1}{(8\pi\beta)^{d/2}} e^{-\beta m^2} \operatorname{erfc}(L/\sqrt{\beta}). \end{aligned}$$

En tanto, la presión de Casimir p , a saber la fuerza de Casimir por unidad de área paralela a las placas, puede determinarse como la

derivada respecto a la distancia de separación L entre ellas,

$$(IV.4.14) \quad p := -\frac{dE_{\text{eff}}}{dL} .$$

Reuniendo las ecuaciones (IV.4.11), (IV.4.13) y (IV.4.14) arribamos a la siguiente expresión para la primera contribución en γ a la presión de Casimir:

$$(IV.4.15) \quad p = -\frac{\gamma^2}{(4\pi)^{(d+1)/2}} (m/L)^{d/2-1/2} K_{d/2-1/2}(2mL) .$$

Resulta de interés analizar los casos límite de (IV.4.15) como función de la variable adimensional mL . Consideremos primero la presión de Casimir cuando las placas están muy distanciadas o, análogamente, tomemos el límite $mL \gg 1$ en (IV.4.15) para obtener el comportamiento

$$(IV.4.16) \quad p \simeq -\frac{\gamma^2}{2^{d+2}\pi^{d/2}} \frac{m^{d/2-1}}{L^{d/2}} e^{-2mL} .$$

Esta expresión muestra que la presión de Casimir está suprimida, para grandes separaciones y campos muy masivos, por un factor exponencial que depende de la variable mL .

Por último, estudiemos el límite de masa pequeña de la fórmula (IV.4.15). Dado $mL \ll 1$, resulta que la presión de Casimir puede aproximarse, de acuerdo a la dimensión d del espacio, por

$$(IV.4.17) \quad p \simeq \begin{cases} \frac{\gamma^2}{4\pi} \log(Lm) & \text{si } d = 1 , \\ -\frac{\gamma^2}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \frac{\Gamma((d-1)/2)}{2} \frac{1}{L^{d-1}} & \text{si } d \geq 2 . \end{cases}$$

La primera línea de la expresión (IV.4.17) es consistente con el hecho de que en 1+1 dimensiones ($d=1$) un campo sin masa genera una energía de Casimir que resulta no ser analítica en $\gamma = 0$ (Milton 2004). Este resultado además coincide, para $d = 3$, con el que se obtiene de tomar el límite de acomplamiento débil en las expresiones de Bordag (2006).

Pese a que podríamos continuar exponiendo otras aplicaciones del FLM en el marco de la TCC usual, creemos que estos ejemplos otorgan una idea lo suficientemente acabada del mismo como para motivar su generalización a TCC no conmutativas en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 5

Formalismo de línea de mundo en la teoría cuántica de campos no conmutativa

*Lo supieron los arduos alumnos de
Pitágoras:
los astros y los hombres vuelven cícli-
camente;
los átomos fatales repetirán la urgente
Afrodita de oro, los tebanos, las ágoras.*

– J. L. BORGES, *La noche cíclica*.

En el decurso del capítulo 4, hemos visto cómo los coeficientes de SDW del operador de fluctuaciones cuánticas, y en consecuencia las correcciones de un bucle a la AE, pueden ser obtenidos para una variedad de modelos en TCC. Dicho operador es, usualmente, un operador diferencial local; esa localidad se ve también reflejada en los coeficientes de SDW asociados, los cuales resultan ser integrales de invariantes locales y pueden ser expresados en términos de productos del potencial y sus derivadas. En este marco, la renormalización de la teoría puede ser llevada a cabo regularizando los factores divergentes que acompañan a estos coeficientes, cfr. (II.3.2).

Al considerar las TCC NC, los resultados mencionados precedentemente sufren modificaciones. Cualitativamente, esto puede entenderse notando que las TCC NC añaden una idea que puede ser considerada el ingrediente principal de una teoría de la gravitación cuántica: una escala de longitud mínima (Douglas y Nekrasov 2001, R. J. Szabo 2003). La presencia de esta escala mínima, a su vez, genera una estructura granular del espacio a pequeñas distancias y da lugar a efectos no locales. Este es el motivo por el cual el operador de fluctuaciones cuánticas es, en general, un operador no local. Los coeficientes de SDW correspondientes a este tipo de operadores no locales, además de ser no locales, presentan algunas propiedades peculiares; un ej. es la mezcla UV-IR (Minwalla *et al.* 2000), relacionada con la existencia de divergencias infrarrojas incluso en el caso de campos masivos.

A lo largo de este capítulo utilizaremos las técnicas del FLM para obtener una descripción sistemática de los coeficientes de SDW para este tipo de operadores no locales. Como veremos en la sección 5.1, este tipo de operadores será relevante a la hora de estudiar la cuantización de campos escalares no conmutativos autointeractuantes en espacios deformados con un producto no conmutativo llamado Moyal. Posteriormente, en las secciones 5.2 y 5.3 veremos cómo la no localidad de los operadores sugiere naturalmente la implementación de integrales de camino en el espacio de fases. Estos resultados nos permitirán obtener una fórmula magistral en la sección 5.4 para los coeficientes de SDW, fórmula con la que analizaremos diversos modelos: partiendo de un caso general con potenciales que multiplican en forma Moyal a derecha e izquierda, continuaremos con el estudio de otra geometría (el toro no conmutativo, sección 5.5) y el modelo $\lambda\phi_\star^4$ en el espacio euclídeo Moyal (sección 5.6). En este último caso analizaremos como renormalizar la teoría al orden de un bucle.

Con esta base seremos capaces de analizar el modelo de Grosse-Wulkenhaar en el capítulo 6. Este es un modelo $\lambda\phi_\star^4$ al que se le ha modificado el propagador mediante la adición de un término armónico (Grosse y Wulkenhaar 2003, 2005). La importancia que ha tomado este modelo en los últimos años reside en sus interesantes propiedades: es renormalizable a todo orden en teoría de perturbaciones, el flujo de renormalización posee un punto fijo en el que los parámetros son finitos y no nulos, y podría ser construido axiomáticamente.

5.1. Teoría cuántica de campos no conmutativa en el espaciotiempo euclídeo Moyal

El capítulo 1 intenta fundamentar el problema de la gravedad cuántica. *Grosso modo*, lo podemos resumir mencionando que tanto la TCC como la teoría de la relatividad general tienen una gran capacidad predictiva, cualitativa y cuantitativa, para los fenómenos en los que una de las dos puede ser dejada de lado. En contraste, para procesos que involucren ambas ocurren ciertas contradicciones teóricas que aún no han sido zanjadas. Como complicación adicional, pareciera ser que no hay medidas experimentales que correspondan a ese tipo de procesos.

En este marco surgen las teorías no conmutativas, asiéndose de uno de los puntos de discordancia entre la relatividad y la cuántica: mientras en la primera teoría los puntos en el espacio pueden ser muestreados utilizando una prueba de masa nula, en la ulterior es necesario el uso de partículas de energía (masa) infinita. Esto sugiere que en una teoría de gravedad cuántica el espacio no podría ser clásico. Una posibilidad

a seguir es generalizar la relación de conmutación entre coordenadas y momentos, introduciendo una matriz Θ de no conmutatividad para los d operadores de posición \hat{x}_μ ; dicha matriz será antisimétrica, de dimensión $d \times d$ y tendrá componentes $\Theta^{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ tales que

$$(V.1.1) \quad [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 2i \Theta^{\mu\nu}.$$

Como hemos mencionado en el capítulo 1, las constantes características de la gravitación y la TCC, sugieren que $\Theta^{\mu\nu} \sim \ell_p$, donde la longitud de Planck toma el valor $\ell_p = \hbar/E_p c \approx 10^{-35}\text{m}$.

Las implicancias de esta regla de conmutación son inmediatas: al igual que acaece en mecánica cuántica usual, donde es imposible encontrar autoestados simultáneos de los operadores conjugados de posición y momento, en esta situación no existen estados cuya posición pueda determinarse con certeza en todas sus componentes (si $\Theta \neq 0$). Más aún, existirá una relación de incerteza de Heisenberg generalizada, la cual invoca la imagen de un espaciotiempo granulado en celdas de dimensión igual a algún parámetro característico de Θ . La geometría resultante, llamada ET euclídeo Moyal, es un ejemplo de geometría no conmutativa. El caso general ha sido estudiado rigurosamente en la publicación de Connes (1994) y Gracia-Bondia *et al.* (2001), mientras que una motivación física puede encontrarse en el trabajo de Landi (1997); un punto crucial en ese contexto es que el conmutador (V.1.1) no tiene por qué ser una matriz constante, sino que puede adquirir una dependencia en las coordenadas.

El lector avezado se estará preguntando a esta altura como implementar estas ideas de no conmutatividad en una TCC; los campos devendrían funciones de operadores en lo que parecería un intrincado camino hacia la obtención de observables. Un enfoque alternativo para el ET euclídeo Moyal está inspirado en el trabajo de Weyl (1927). La idea, que originalmente correspondía a un espacio de fases bidimensional¹, se puede resumir en la siguiente proposición: el producto de operadores no es más que un producto NC.

En efecto, utilizando el mapeo Ω de Weyl, para cada función $f(x)$ es posible definir un operador \hat{f} en la forma

$$(V.1.2) \quad \hat{f} := \Omega(f) := \int d\tilde{p} \tilde{f}(p) e^{ip\hat{x}},$$

donde \hat{x} es el vector cuyas componentes son los operadores de posición y $\tilde{f}(p)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. Al momento de multiplicar

¹En el transcurso de esta sección veremos que el ET Moyal euclídeo para dimensiones $d > 2$ puede ser escrito como suma de espacios uni- y bidimensionales conmutantes entre sí.

dos operadores \hat{f} y \hat{g} , la utilización de (V.1.2) conduce a

$$\begin{aligned}
 \hat{f}\hat{g} &= \int d\tilde{p}d\tilde{q} \tilde{f}(p) e^{ip\hat{x}} \tilde{g}(q) e^{iq\hat{x}} \\
 (V.1.3) \quad &= \int d\tilde{p}d\tilde{q} \tilde{f}(p) \tilde{g}(q) e^{ip\Theta q} e^{i(p+q)\hat{x}} \\
 &= \int d\tilde{p} \left(\int d\tilde{q} \tilde{f}(p-q) \tilde{g}(q) e^{ip\Theta q} \right) e^{ip\hat{x}},
 \end{aligned}$$

dato que para agrupar las exponenciales en la segunda línea hay que tener en cuenta la relación de conmutación (V.1.1) y la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Por simple observación vemos que la función $\Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g})$ asociada al producto de operadores puede ser escrita en términos de un producto \star no local:

$$\begin{aligned}
 (V.1.4) \quad \Omega^{-1}(\hat{f}\hat{g}) &= \int d\tilde{p}d\tilde{q} \tilde{f}(p-q) \tilde{g}(q) e^{ip\Theta q} e^{ipx} \\
 &=: (f \star g)(x).
 \end{aligned}$$

A idéntico resultado arribamos si implementamos el mapeo inverso al de Weyl, el mapeo de Wigner (1932); para $d = 2$, la regla de conmutación $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i\theta$ y los autovectores $|x_1\rangle$ de \hat{x}_1 nos permiten escribir

$$(V.1.5) \quad \Omega^{-1}(\hat{f}) := f(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ix_2 y / \theta} \langle x_1 + y | \hat{f} | x_1 - y \rangle,$$

Una forma alternativa de escritura para el producto \star , tomando dos funciones escalares ϕ y ψ que dependen de $x \in \mathbb{R}^d$, es

$$(V.1.6) \quad (\phi \star \psi)(x) = e^{i\partial^\phi \Theta \partial^\psi} \phi(x) \psi(x),$$

donde ∂^ϕ y ∂^ψ denotan el operador gradiente que actúa sobre ϕ y ψ respectivamente. La expresión $\partial^\phi \Theta \partial^\psi$ representa $\partial_\mu^\phi \Theta^{\mu\nu} \partial_\nu^\psi$: hemos omitido los índices de suma para facilitar la escritura, algo que haremos de aquí en adelante salvo que pueda dar lugar a confusión. Observando (V.1.6) se vuelve patente que el producto \star es una deformación del producto usual, en el sentido que para parámetros de no conmutatividad pequeños se recupera este último. Aquellos interesados en las condiciones bajo las cuales la exponencial en la expresión (V.1.6) está bien definida pueden referirse a la publicación de Estrada *et al.* (1989).

De entre las diversas propiedades del producto Moyal, resultan fundamentales la no conmutatividad y la asociatividad; ellas pueden demostrarse partiendo de la fórmula (V.1.6) y empleando la antisimetría

de la matriz Θ . Además, podemos verificar que, dotadas de este producto, las coordenadas poseen el conmutador

$$(V.1.7) \quad [x^\mu, x^\nu]_\star := x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = 2i \Theta^{\mu\nu},$$

en concordancia con (V.1.1). Asimismo, la antisimetría de Θ garantiza que su rango sea par y, en el caso general, se pueda descomponer

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^c \oplus \mathbb{R}^{2b}$$

eligiendo coordenadas $x = (\bar{x}, \hat{x})$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^c$ conmutantes y $\hat{x} \in \mathbb{R}^{2b}$ no conmutantes. Por ende, siempre es posible escribir

$$(V.1.8) \quad \Theta = \mathbf{0}_c \oplus \Xi,$$

donde $\mathbf{0}_c$ es la matriz nula en \mathbb{R}^c y Ξ es una matriz antisimétrica no degenerada en \mathbb{R}^{2b} . En adición, la matriz Ξ puede expresarse como la suma directa de b matrices de dimensión 2×2 de la forma

$$(V.1.9) \quad \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo, podemos interpretar al ET no conmutativo \mathbb{R}^{2b} como dividido en b planos no conmutativos, los cuales conmutan entre sí y quedan definidos por un parámetro real de no conmutatividad. Cuando estos parámetros no sean iguales todos entre sí, llamaremos $\theta_{\mu=1 \dots, d}$ a la única entrada no nula de la μ -ésima fila de modo tal que, por ejemplo, el plano formado por las coordenadas x_1 y x_2 está caracterizado por el parámetro $\theta_1 = -\theta_2$.

Conviene, antes de estudiar un modelo de TCC NC, mencionar otras propiedades sobre el producto Moyal que serán de ayuda:

- bajo el signo integral se puede intercambiar el producto Moyal por el producto usual, es decir

$$(V.1.10) \quad \int \phi(x) \star \psi(x) = \int \phi(x) \psi(x);$$

- como consecuencia de la anterior proposición, es cíclico bajo el signo integral; en otras palabras, dadas tres funciones $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$ vale

$$(V.1.11) \quad \int \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \phi_3(x) = \int \phi_3(x) \star \phi_1(x) \star \phi_2(x);$$

- su transformada de Fourier se puede escribir en la forma

$$(V.1.12) \quad \widetilde{\phi \star \psi}(p) = \int d\tilde{q} e^{-ip\Theta q} \tilde{\phi}(p-q) \tilde{\psi}(q).$$

5.1.1. Modelo $\lambda\phi_\star^3$ en el espaciotiempo euclídeo Moyal.

Por regla general, para construir un dado modelo en el ET euclídeo Moyal tomaremos la acción de un modelo conmutativo y reemplazaremos el producto usual por el Moyal. De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, esto se correspondería con una deformación de la acción original, la cual en un desarrollo a primer orden en los parámetros de no conmutatividad agregaría términos proporcionales a $\Theta^{\mu\nu}$.

Para familiarizarnos con las TCC NC, tomemos un modelo simple, el de un campo escalar con una autointeracción cúbica. Teniendo en cuenta que en los términos cuadráticos de la acción es irrelevante la inclusión o no del producto Moyal, vid. (V.1.10), el lagrangiano de este modelo es

$$(V.1.13) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{3!}\varphi_\star^3,$$

donde hemos utilizado la notación $\varphi_\star^3 := \varphi \star \varphi \star \varphi$.

Tengamos presente que la contribución de un bucle a la AE está dictada por (II.2.13) en función del operador de fluctuaciones cuánticas, el cual se computa como² la variación segunda de la acción con respecto al campo cuántico φ evaluada en el campo clásico ϕ . En el caso conmutativo, i.e. $\Theta = 0$, esta corrección de un bucle es

$$(V.1.14) \quad \Gamma_{1-\text{bucle}}^C = \frac{1}{2} \log \text{Det} \{ -\partial^2 + m^2 + \lambda \phi(x) \}.$$

Conforme a los teoremas enunciados en el capítulo 3, la traza del NdC de este operador de Schrödinger regular, posee un desarrollo asintótico en potencias del tiempo propio de la forma de la ecuación (III.2.10).

Por otro lado, en el caso no conmutativo ($\Theta \neq 0$), el cálculo del operador de fluctuaciones cuánticas es un poco más delicado debido a la presencia de productos Moyal. Un análisis detallado muestra que la contribución de un bucle $\Gamma_{1-\text{bucle}}^{NC}$ a la AE correspondiente al lagrangiano (V.1.13) es

$$(V.1.15) \quad \Gamma_{1-\text{bucle}}^{NC} = \frac{1}{2} \log \text{Det} \left\{ -\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} L(\phi) + \frac{\lambda}{2} R(\phi) \right\}.$$

A diferencia de lo que sucedía en el caso conmutativo, la no conmutatividad del producto da origen a dos términos diversos en el potencial: $L(\phi)$ es un operador cuya acción sobre una función $\psi(x)$ está definida como $L(\phi)\psi(x) := (\phi \star \psi)(x)$ mientras que $R(\phi)\psi(x) := (\psi \star \phi)(x)$. En

²La ecuación (II.2.13) posee asimismo un término que corresponde al núcleo de calor de una partícula libre, proveniente de la normalización de la funcional generatriz $Z[J]$. Dado que es independiente del modelo, no será de interés sino hasta el momento de la renormalización.

otras palabras, $L(\phi(x))$ y $R(\phi(x))$ corresponden a multiplicación Moyal a izquierda o a derecha por ϕ . Estos operadores no locales pueden también ser escritos utilizando el llamado corrimiento de Bopp (Bopp's shift) para el producto Moyal:

$$(V.1.16) \quad \begin{aligned} L(\phi)\psi(x) &= \phi(x + i\Theta\partial)\psi(x), \\ R(\phi)\psi(x) &= \phi(x - i\Theta\partial)\psi(x). \end{aligned}$$

Como corolario de las expresiones (V.1.13) y (V.1.16), una posibilidad para regularizar la AE en el modelo $\lambda\phi_\star^3$ es estudiar la traza del NdC del operador hermítico³ y no local

$$(V.1.17) \quad -\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi(x + i\Theta\partial) + \frac{\lambda}{2}\phi(x - i\Theta\partial).$$

En algunas ocasiones, como en los ejemplos que tratamos en los Anexos 5.A y 5.B, podría resultar relativamente simple el estudio directo del espectro del operador de fluctuaciones cuánticas. En el caso general, nos encontraremos frente a potenciales $l_{1,2}(x)$ y $r_{1,2}(x)$ arbitrarios que forman parte de un operador en la forma

$$(V.1.18) \quad -\partial^2 + L(l_1(x)) + R(r_1(x)) + L(l_2(x))R(r_2(x)).$$

Sus propiedades pueden ser radicalmente opuestas a las de los operadores con los que estamos habituados a trabajar, derivados de modelos conmutativos. También en los Anexos 5.A y 5.B se pueden observar algunas de estas curiosidades.

Si la traza del NdC de estos peculiares operadores de fluctuaciones cuánticas poseen o no un desarrollo de algún tipo que permita estudiar la AE y, en caso afirmativo, cuál es su forma, son preguntas que no podemos contestar utilizando los teoremas del capítulo 3. Una de las claves para obtener una respuesta, es notar que en la expresión (V.1.18), teniendo en mente el corrimiento de Bopp, la variable x y el operador ∂_x parecen estar en un pie de igualdad. Esto no sucedía en el caso conmutativo, en el cual el operador ∂_x , vinculado al operador momento en una primera cuantización, sólo formaba parte del término cinético. Es por este motivo que dedicaremos dos secciones al cálculo de IdC en el espacio de fases antes de intentar dar una respuesta a esta interrogante.

5.2. Integrales de camino en el espacio de fases

Consideremos un operador H que posee un potencial no local formado por $l(x)$ y $r(x)$, funciones de $x \in \mathbb{R}^d$ que multiplican en forma

³La hermiticidad está garantizada por la aparición de los términos multiplicativos tanto a derecha como a izquierda.

Moyal a izquierda y a derecha respectivamente:

$$(V.2.1) \quad H = -\partial^2 + L(l) R(r) .$$

Notemos que esta expresión no posee problemas de ordenamiento dado que, debido a la asociatividad del producto Moyal, $L(l)$ y $R(r)$ conmutan entre sí. Haciendo uso del corrimiento de Bopp podemos por lo tanto interpretar este operador como la representación, en el espacio de coordenadas, de un hamiltoniano que en el marco de la primera cuantización sería

$$(V.2.2) \quad H = p^2 + l(x - \Theta p) r(x + \Theta p) .$$

Vale la pena mencionar que, en concordancia con la aseveración que sigue a la fórmula (V.2.1), los operadores $x_{\pm}^{\mu} = (x^{\mu} \pm \Theta^{\mu\nu} p_{\nu})$ conmutan entre sí y por consiguiente tampoco en la expresión (V.2.2) hay problemas de ordenamiento.

A la hora de construir la representación de la amplitud de transición asociada al operador (V.2.2) en términos de IdC, es empero conveniente reescribir el hamiltoniano de acuerdo al orden de Weyl. Comencemos por definir este ordenamiento: se dice que un operador $A(x, p)$ en el espacio de fases está ordenado de acuerdo a Weyl cuando está escrito de tal manera que $A(x, p) = A_S(x, p) + \Delta A \equiv A_W(x, p)$, donde $A_S(x, p)$ involucra productos simétricos en x y p y ΔA incluye todos los términos que resultan de realizar eventuales conmutaciones entre x y p , necesarias para reordenar $A(x, p)$ en su forma simétrica. Por ejemplo, el producto $xp = (xp)_S + \frac{1}{2}[x, p] = (xp)_S + \frac{i\hbar}{2} \equiv (xp)_W$, con $(xp)_S = \frac{1}{2}(xp + px)$. Un tratamiento preciso sobre este ordenamiento puede ser encontrado en los anexos B y C del libro de Bastianelli y van Nieuwenhuizen (2006) dedicado a IdC.

En el caso que nos atañe, por cuanto el potencial $l(x - \Theta p) r(x + \Theta p)$ mezcla coordenadas y momentos, la expresión (V.2.2) no está *a priori* ordenada simétricamente. No obstante, empleando el desarrollo de Taylor para expandir las funciones l y r , se puede demostrar que el operador (V.2.2) sólo involucra productos simétricos en x y p ; esto es idéntico a decir que los términos que involucran productos entre x y p pueden ser ordenados simétricamente sin introducir términos adicionales provenientes de conmutadores. Analicemos por ejemplo el producto de las contribuciones lineales de los desarrollos de Taylor de

l y r , el cual puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 x_-^\mu x_+^\nu &= (x^\mu x^\nu)_S - \Theta^{\mu\rho} \Theta^{\nu\sigma} (p_\rho p_\sigma)_S - \Theta^{\mu\rho} p_\rho x^\nu + \Theta^{\nu\sigma} x^\mu p_\sigma \\
 (V.2.3) \quad &= (x_-^\mu x_+^\nu)_S - \frac{1}{2} \Theta^{\mu\rho} [p_\rho, x^\nu] + \frac{1}{2} \Theta^{\nu\sigma} [x^\mu, p_\sigma] \\
 &= (x_-^\mu x_+^\nu)_S,
 \end{aligned}$$

gracias a que la matriz $\Theta^{\mu\nu}$ es antisimétrica. No es difícil convencerse de que esta propiedad de $\Theta^{\mu\nu}$, sumada a la relación de conmutación $[x_-^\mu, x_+^\nu] = 0$ y a la simetría de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de l y r , implica que las contribuciones del producto $l(x_-) r(x_+)$ son simétricas: $[x_-^\mu, x_+^\nu] = 0$ permite reordenar un factor x_+^μ (ó x_-^ν) entre varios x_-^ν (respectivamente x_+^μ), mientras que la simetría de los desarrollos de Taylor hace posible la simetrización de los productos entre diversas variables x_+^μ (respectivamente x_-^ν).

Una vez que nos hemos cerciorado de que el potencial está ordenado en la forma de Weyl, podemos hacer uso de la regla del punto intermedio (Bastianelli y van Nieuwenhuizen 2006, De Boer *et al.* 1995) y escribir para el NdC del operador (V.2.2) la siguiente representación en términos de IdC:

$$\begin{aligned}
 (V.2.4) \quad \langle x + z | e^{-\beta H} | x \rangle &= \int_{x(0)=x}^{x(t)=x+z} \mathcal{D}x(t) \mathcal{D}p(t) e^{-\int_0^\beta dt \{p^2(t) - ip(t)\dot{x}(t)\}} \\
 &\quad \times e^{-\int_0^\beta dt l(x(t) - \Theta p(t)) r(x(t) + \Theta p(t))}.
 \end{aligned}$$

En esta expresión $\beta > 0$ y $x(t), p(t)$ representan trayectorias en el espacio de fases \mathbb{R}^{2d} . Es importante recalcar que la IdC debe realizarse sobre trayectorias $x(t)$ que satisfacen las condiciones de contorno $x(0) = x$ y $x(\beta) = x + z$, mientras que las trayectorias $p(t)$ son arbitrarias.

La integral (V.2.4) se puede trabajar siguiendo los mismos pasos que se suelen seguir en el caso conmutativo. En primera instancia, reemplazamos la integral en las trayectorias $x(t)$ por una integral sobre las perturbaciones $q(t) := x(t) - x_{cl}(t)$ alrededor del camino clásico para una partícula libre, $x_{cl}(t) = zt/\beta + x$. Posteriormente, efectuamos un reescalo de todas las variables con dimensión, utilizando el tiempo propio β para volverlas adimensionales: $t \rightarrow \beta t$, $q \rightarrow \sqrt{\beta} q$, $p \rightarrow p/\sqrt{\beta}$. De esta manera (V.2.4) se convierte en

$$\begin{aligned}
 (V.2.5) \quad \langle x + z | e^{-\beta H} | x \rangle &= \beta^{-d/2} \int_{q(0)=0}^q (1) = \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-\int_0^1 dt \{p^2 - ip\dot{q}\}} \\
 &\quad \times e^{i\frac{z}{\sqrt{\beta}} \int_0^1 dt p} e^{-\beta \int_0^1 dt l(x + tz + \sqrt{\beta} q - \Theta p/\sqrt{\beta}) r(x + tz + \sqrt{\beta} q + \Theta p/\sqrt{\beta})}.
 \end{aligned}$$

También en forma semejante a lo realizado en el caso conmutativo, con el fin de facilitar la escritura de las próximas ecuaciones, conviene definir el valor medio de una funcional $f[q(t), p(t)]$ utilizando la medida gaussiana de la integral de camino en el espacio de fases y normalizando de manera tal que $\langle 1 \rangle_D = 1$:

$$(V.2.6) \quad \langle f[q(t), p(t)] \rangle_D := \frac{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-\int_0^1 dt \{p^2 - ip\dot{q}\}} f[q(t), p(t)]}{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-\int_0^1 dt \{p^2 - ip\dot{q}\}}}.$$

A modo de ejemplo, la fórmula (V.2.5) se puede escribir como

$$(V.2.7) \quad \langle x + z | e^{-\beta H} | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \left\langle e^{i \frac{z}{\sqrt{\beta}} \int_0^1 dt p} \times \right. \\ \left. \times e^{-\beta \int_0^1 dt l(x+tz+\sqrt{\beta}q-\Theta p/\sqrt{\beta}) r(x+tz+\sqrt{\beta}q+\Theta p/\sqrt{\beta})} \right\rangle_D.$$

Llegado este punto podemos utilizar el desarrollo en serie de McLaurin de la exponencial del término potencial, para luego interpretar que todos los potenciales han sido trasladados del punto x en las cantidades adecuadas. Empleando el gradiente ∂ como generador de traslaciones obtenemos

$$(V.2.8) \quad \langle x + z | e^{-\beta H} | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_n \times \\ \times \left\langle e^{i \frac{z}{\sqrt{\beta}} \int_0^1 dt p} e^{\sum_{i=1}^n [t_i z + \sqrt{\beta} q(t_i) - \Theta p(t_i)/\sqrt{\beta}] \partial_i^l + [t_i z + \sqrt{\beta} q(t_i) + \Theta p(t_i)/\sqrt{\beta}] \partial_i^r} \right\rangle_D \times \\ \times l(x_1) \dots l(x_n) r(x_1) \dots r(x_n) \Big|_x,$$

donde ∂_i^l y ∂_i^r corresponden a los gradientes de $l(x_i)$ y $r(x_i)$ respectivamente⁴. Tal y como está indicado, al final del cálculo todas las variables x_j deben ser evaluadas en x . Si observamos detenidamente (V.2.8), notamos que las variables $q(t)$ y $p(t)$ aparecen linealmente en la exponencial del valor medio y, consecuentemente, para hacer la re-interpretación

$$(V.2.9) \quad \langle x + z | e^{-\beta H} | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_n \times \\ \times e^{\sum_{i=1}^n t_i z (\partial_i^l + \partial_i^r)} \left\langle e^{\int_0^1 dt (p k_n + q j_n)} \right\rangle_D l(x_1) \dots l(x_n) r(x_1) \dots r(x_n) \Big|_x$$

⁴En este caso, los subíndices i no hacen referencia a componentes espaciotemporales sino al i -ésimo punto $x_i \in \mathbb{R}^d$.

basta con reconocer la forma apropiada de las fuentes $k_n(t)$ y $j_n(t)$:

$$(V.2.10) \quad \begin{aligned} k_n(t) &= \frac{iz}{\sqrt{\beta}} + \frac{\Theta}{\sqrt{\beta}} \sum_{i=1}^n \delta(t-t_i)(\partial_i^l - \partial_i^r), \\ j_n(t) &= \sqrt{\beta} \sum_{i=1}^n \delta(t-t_i)(\partial_i^l + \partial_i^r). \end{aligned}$$

A fin de cuentas, hemos reducido el cálculo de IdC de operadores no locales a la determinación de la funcional generatriz

$$Z_D[k, j] := \left\langle e^{\int_0^1 dt (pk + qj)} \right\rangle_D$$

en el espacio de fases. La próxima sección la dedicaremos al cálculo de esta FG para fuentes cualesquiera $k(t)$ y $j(t)$.

5.3. La funcional generatriz en el espacio de fases

La FG en el espacio de fases, funcional a partir de la cual se pueden obtener los valores de expectación de potencias arbitrarias $\langle p^n q^m \rangle$, está definida para fuentes arbitrarias $k(t)$ y $j(t)$ como

$$(V.3.1) \quad \begin{aligned} Z_D[k, j] &:= \frac{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-\int_0^1 dt (p^2 - ip\dot{q})} e^{\int_0^1 dt (pk + qj)}}{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-\int_0^1 dt (p^2 - ip\dot{q})}} \\ &= \frac{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} \mathcal{D}P e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 dt P^t A P + \int_0^1 dt P^t K}}{\int_{q(0)=0}^{q(1)=0} \mathcal{D}P e^{-\int_0^1 dt P^t A P}}. \end{aligned}$$

En la segunda línea hemos introducido los vectores P y K , y el operador A , definido sobre aquellos caminos que cumplen condiciones de contorno tipo Dirichlet en q , $q(0) = q(1) = 0$:

$$(V.3.2) \quad P := \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \quad K := \begin{pmatrix} k(t) \\ j(t) \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo se hace patente que el argumento de la exponencial es una funcional cuadrática en los caminos p y q , con la particularidad de que A es un operador invertible teniendo en cuenta las condiciones de contorno mencionadas. Completando cuadrados y recordando la normalización elegida para la FG, encontramos que

$$(V.3.3) \quad Z_D[k, j] = e^{\frac{1}{2} \int_0^1 dt K^t A^{-1} K}.$$

Por ende, para determinar la FG, precisamos el núcleo $A^{-1}(t, t')$, correspondiente al operador inverso de A . Su cálculo no ofrece mayores

inconvenientes y arroja como resultado

$$(V.3.4) \quad A^{-1}(t, t') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} [h(t, t') + f(t, t')] \\ \frac{i}{2} [h(t, t') - f(t, t')] & 2g(t, t') \end{pmatrix},$$

valiéndonos de las funciones auxiliares

$$(V.3.5) \quad \begin{aligned} h(t, t') &:= 1 - t - t', \\ f(t, t') &:= t - t' - \epsilon(t - t'), \\ g(t, t') &:= t(1 - t')H(t' - t) + t'(1 - t)H(t - t'). \end{aligned}$$

En estas definiciones hemos hecho uso de la función signo $\epsilon(\cdot)$, cuyo valor es ± 1 si su argumento es respectivamente positivo o negativo, y la función $H(\cdot)$ de Heaviside. Notemos que $g(t, t')$ no es más que la función de Green del operador $(-\partial_t^2)_D$ con condiciones de contorno tipo Dirichlet.

Como un caso particular, podemos utilizar los valores de las fuentes (V.2.10) para computar el valor medio que figura en la ec. (V.2.9),

$$(V.3.6) \quad \left\langle e^{\int_0^1 dt (p k_n + q j_n)} \right\rangle_D = e^{-\frac{z^2}{4\beta} + \frac{iz}{2\beta} \Theta \sum_{i=1}^n (\partial_i^l - \partial_i^r)} e^{\Delta_n},$$

en términos del operador Δ_n definido en la forma

$$(V.3.7) \quad \begin{aligned} \Delta_n := \sum_{i,j=1}^n & \left[\beta g(t_i, t_j) (\partial_i^l + \partial_i^r) (\partial_j^l + \partial_j^r) - \frac{1}{4\beta} (\partial_i^l - \partial_i^r) \Theta^2 (\partial_j^l - \partial_j^r) \right. \\ & \left. - \frac{i}{2} f(t_i, t_j) (\partial_i^l \Theta \partial_j^l - \partial_i^r \Theta \partial_j^r) - i h(t_i, t_j) \partial_i^l \Theta \partial_j^r \right]. \end{aligned}$$

Por supuesto, podemos verificar que tomando $\Theta = 0$ recobramos el resultado conmutativo; efectivamente, el único término de Δ_n que sobrevive en este límite es el asociado a $g(t, t')$, la función de Green del operador $(-\partial_t^2)_D$.

5.4. Formalismo de línea de mundo en el espacio de fases

En el decurso de las dos secciones precedentes, hemos establecido varios resultados referentes a IdC en el espacio de fases. Ellos nos serán de gran utilidad para implementar el FLM en el espacio de fases, teniendo en cuenta que, según hemos visto en el capítulo 4, este formalismo permite la utilización de IdC para el cálculo de NdC. De esta manera, intentaremos encontrar en esta sección qué tipos de desarrollo admite la traza del NdC de operadores no locales de la forma (V.2.2).

Iniciemos considerando la traza del NdC de un operador no local H multiplicado en forma Moyal $\bar{\star}$ con una función regular f :

$$(V.4.1) \quad \text{Tr} (f(x) \bar{\star} e^{-\beta H}) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \langle x+z | e^{-\beta H} | x \rangle \Big|_{z=-i\bar{\Theta}\partial^f} f(x).$$

Por supuesto, seguimos la notación que ya hemos utilizado anteriormente, según la cual ∂^f denota el gradiente que actúa sólo sobre la función regularizadora f , y la variable z debe ser formalmente reemplazada por el operador $-i\bar{\Theta}\partial^f$. La demostración de (V.4.1) es inmediata si se introduce en la parte izquierda la descomposición espectral de la unidad en términos de autoestados del operador posición y se recuerda que el operador ∂ es el generador de las traslaciones:

$$e^{-i\bar{\Theta}\partial^f\partial} \langle x | = \langle x - i\bar{\Theta}\partial^f |.$$

Cabe aclarar que el producto $\bar{\star}$ se encuentra definido en términos de una nueva matriz antisimétrica $\bar{\Theta}$ que, en principio, es diferente de Θ . Esto nos permitirá considerar luego los casos en los que la función regularizadora actúa multiplicando en forma conmutativa ($\bar{\Theta} = 0$), Moyal a izquierda ($\bar{\Theta} = \Theta$) o Moyal a derecha ($\bar{\Theta} = -\Theta$).

El procedimiento a esta altura es seguramente evidente; para calcular (V.4.1) podemos utilizar la expresión (V.2.9) para la amplitud de transición entre dos puntos arbitrarios, recordando que el valor medio involucrado es (V.3.6). De esta forma obtenemos la fórmula maestra

$$(V.4.2) \quad \begin{aligned} \text{Tr} (f(x) \bar{\star} e^{-\beta H}) &= \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) e^{\frac{1}{4\beta} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j} \times \\ &\times \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{i\Delta_n^{NC} + \beta\Delta_n^C} l(x_1) \dots l(x_n) r(x_1) \dots r(x_n) \Big|_x, \end{aligned}$$

donde, por motivos que serán explicados a continuación, hemos definido los siguientes operadores diferenciales

$$(V.4.3) \quad \begin{aligned} \Delta_n^C &:= \sum_{i,j=1}^n g(t_i, t_j) (\partial_i^l + \partial_i^r) (\partial_j^l + \partial_j^r), \\ D_i &:= (\Theta - \bar{\Theta}) \partial_i^l - (\Theta + \bar{\Theta}) \partial_i^r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_n^{NC} := & \sum_{i < j=1}^n \left\{ [\partial_i^l \Theta \partial_j^l - \partial_i^r \Theta \partial_j^r] - (1 - t_i - t_j)(\partial_i^l \Theta \partial_j^r - \partial_i^r \Theta \partial_j^l) \right. \\
& + (t_i - t_j) [\partial_i^l (-\Theta + \bar{\Theta}) \partial_j^l + \partial_i^r (\Theta + \bar{\Theta}) \partial_j^r + \partial_i^l \bar{\Theta} \partial_j^r + \partial_i^r \bar{\Theta} \partial_j^l] \left. \right\} \\
& - \sum_{i=1}^n (1 - 2t_i) \partial_i^l \Theta \partial_i^r.
\end{aligned}$$

Conviene notar que en la deducción de (V.4.2) hemos utilizado la simetría del integrando con respecto a permutaciones de las variables t_i y hemos integrado por partes para reemplazar derivadas sobre la función regular f por derivadas sobre los potenciales l_i y r_i , es decir $\partial^f \rightarrow -\sum_{i=1}^n (\partial_i^l + \partial_i^r)$. Esta es la razón por la cual el caso sin función regular puede ser entendido como $f \equiv 1$ y adicionalmente, para hacer patente que las derivadas sobre f se anulan, $\bar{\Theta} = 0$.

Antes de analizar en detalle los diversos casos que de acuerdo al valor de $\bar{\Theta}$ engloba la expresión (V.4.2), conviene realizar algunos comentarios generales. Como veremos seguidamente, los coeficientes de SDW para el caso conmutativo están enteramente determinados por la acción del operador Δ_n^C , dado que Δ_n^{NC} y D_i se anulan para $\bar{\Theta} = \Theta = 0$. Por otro lado, en el caso que $r(x) \equiv 1$ (o $l(x) \equiv 1$) y la función regularizadora multiplica en forma Moyal a izquierda (derecha, respectivamente), los operadores D_i se anulan y el único término no nulo en Δ_n^{NC} es el primero $\partial_i^l \Theta \partial_j^l$ ($-\partial_i^r \Theta \partial_j^r$, respectivamente) que reemplaza todos los productos conmutativos por productos Moyal a izquierda (derecha, respectivamente).

Por otro lado, mostraremos que el factor $e^{1/\beta \sum_{i,j} D_i D_j}$ es responsable de la presencia de coeficientes de SDW no locales en el sentido Moyal, los cuales a su vez corresponden a contribuciones de diagramas no planares y pueden conducir a la mezcla UV-IR. En lo sucesivo investigaremos la influencia de la elección de los valores de Θ y $\bar{\Theta}$ sobre (V.4.2).

5.4.1. Caso conmutativo. Examinemos primeramente el caso conmutativo, ya que nos servirá como comparación en los restantes. Debemos por lo tanto fijar $\bar{\Theta} = \Theta = 0$ en la fórmula maestra (V.4.2) para la traza del NdC. En adición podemos elegir, por ej., $r(x) \equiv 1$. Como ya hemos mencionado, los operadores D_i y Δ_n^{NC} se anulan, de forma que el NdC queda resumido en

$$(V.4.4) \quad \text{Tr} (f(x) \cdot e^{-\beta H}) = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) \times$$

$$\times \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{\beta \sum_{i,j=1}^n g(t_i, t_j) \partial_i \partial_j} l(x_1) \dots l(x_n) \Big|_x.$$

Esta fórmula muestra que los coeficientes de SDW pueden ser escritos como integrales del producto de la función regularizadora y del potencial y sus derivadas. En añadidura, recalquemos que respetando el orden que inducen los índices de las variables t_i y x_j en (V.4.4), el resultado es correcto incluso para aquellos casos en los que $l(x)$ es un potencial a valores matriciales. Ciertamente, para ello el producto de dos potenciales $l(x)$ debe ser entendido como el producto matricial.

5.4.2. Caso no conmutativo con $\bar{\Theta} = 0$. En este párrafo, trabajaremos con $\Theta \neq 0$, suponiendo además que la función regularizadora multiplica bajo el producto conmutativo ($\bar{\Theta} = 0$). Bajo estas condiciones, la expresión (V.4.2) se reduce a

$$(V.4.5) \quad \text{Tr} (f(x) \cdot e^{-\beta H}) = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) \times \\ \times \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{\Delta_n} l(x_1) \dots l(x_n) r(x_1) \dots r(x_n) \Big|_x.$$

Es posible demostrar que algunos de los coeficientes de SDW que se derivan de esta fórmula son no locales, incluso en el sentido Moyal (Vassilevich 2004). Para este fin nos bastará considerar un potencial que involucre sólo multiplicación Moyal a izquierda. En efecto, fijando $r(x) \equiv 1$, los primeros términos de la serie en (V.4.5) son

$$(V.4.6) \quad \text{Tr} (f(x) \cdot e^{-\beta H}) = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) \left(1 - \beta e^{-\frac{1}{4\beta} \partial^t \Theta^2 \partial^t} l(x) + \dots \right).$$

El primer término coincide con el término principal del caso conmutativo, el llamado término de volumen. El segundo, por otro lado, puede ser reescrito en una forma adecuada para un desarrollo en potencias de β ,

$$(V.4.7) \quad -\frac{\beta}{(4\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^c} d\bar{x} \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} f(\bar{x}, \hat{x}) \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} \frac{\beta^b}{\pi^b \det \Xi} e^{\beta(\hat{x}-\hat{y})\Xi^{-2}(\hat{x}-\hat{y})} l(\bar{x}, \hat{y}),$$

para lo cual ha sido necesario descomponer Θ en su parte singular y no singular según (V.1.8). De esta expresión se puede ver que la presencia de una función regularizadora multiplicando en la forma usual genera una contribución al coeficiente a_{b+1} que es no local incluso en el sentido

Moyal y toma la forma

(V.4.8)

$$a_{b+1} = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\pi^b \det \Xi} \int_{\mathbb{R}^c} d\bar{x} \left(\int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} f(\bar{x}, \hat{x}) \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} l(\bar{x}, \hat{y}) \right) + \dots$$

Vale la pena resaltar que este efecto ha sido obtenido considerando $r(x) \equiv 1$, es decir, no es una consecuencia de la mezcla de productos Moyal actuando a izquierda y a derecha en el potencial.

5.4.3. Caso con todos los productos Moyal a izquierda (o a derecha). Procederemos ahora a ilustrar el caso en el que la traza del NdC involucra únicamente productos Moyal a izquierda ($r(x) \equiv 1$ y $\bar{\Theta} = \Theta$) o a derecha ($l(x) \equiv 1$ y $\bar{\Theta} = -\Theta$). Bajo cualquiera de estas suposiciones los operadores D_i se anulan, mientras que Δ_n^{NC} toma la forma

$$(V.4.9) \quad \Delta_n^{NC} := \pm \sum_{i < j=1}^n \partial_i \Theta \partial_j,$$

donde el signo superior (inferior) corresponde a la elección de los productos Moyal todos a izquierda (derecha) y las derivadas actúan consecuentemente sobre $l(x_i)$ ($r(x_i)$). La única contribución no conmutativa a los coeficientes de SDW es, por esta razón, el factor $e^{i\Delta_n^{NC}}$; a su vez, esta fase es exactamente igual a la que surgiría en la multiplicación Moyal de n funciones de acuerdo con la definición (V.1.6). Teniendo en cuenta este hecho, la traza del NdC puede ser reescrita como

$$(V.4.10) \quad \text{Tr} (f(x) \star e^{-\beta H}) = \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) \\ \times \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{\beta \sum_{i,j=1}^n g(t_i, t_j) \partial_i \partial_j} l(x_1) \star \dots \star l(x_n) \Big|_x.$$

Concluimos entonces que los coeficientes de SDW pueden obtenerse en esta ocasión a partir de los coeficientes del caso conmutativo para un potencial a valores matriciales, sencillamente reemplazando todos los productos matriciales (especialmente locales) con productos Moyal

a izquierda (derecha). A orden β^3 obtenemos el siguiente desarrollo:

(V.4.11)

$$\begin{aligned} \text{Tr} (f(x) \star e^{-\beta H}) &= \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) \\ &\times \left[1 - \beta l(x) + \beta^2 \left(\frac{1}{2} l_{\star}^2(x) - \frac{1}{6} \partial^2 l(x) \right) + \beta^3 \left(-\frac{1}{60} \partial^4 l(x) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{12} \left(\partial^2 l \star l(x) + l \star \partial^2 l(x) + \partial l \star \partial l(x) \right) - \frac{1}{3!} l_{\star}^3(x) \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

En resumen, siempre que haya productos Moyal sólo a izquierda (o a derecha), los coeficientes de SDW son locales en el sentido Moyal (Gayral y Iochum 2005, Vassilevich 2004).

5.4.4. Caso general. La opción restante es considerar la presencia de ambas funciones $l(x)$ y $r(x)$ en el potencial del operador (V.2.2), donde por simplicidad tomaremos $f(x) \equiv 1$. La fórmula (V.4.2) se reduce en este caso a

$$\begin{aligned} \text{(V.4.12)} \quad \text{Tr} (e^{-\beta H}) &= \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^d} dx \\ &\times \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n e^{\Delta^n} l(x_1) \dots l(x_n) r(x_1) \dots r(x_n) \Big|_x, \end{aligned}$$

expresión similar a la obtenida en la sección 5.4.2 tanto en aspecto como en implicancias. Con la intención de fundamentar esta aseveración, analicemos (V.4.12) término a término. Para $n = 0$, obtenemos la habitual contribución conmutativa de volumen. Si tomamos $n = 1$, el resultado está dado por

$$\text{(V.4.13)} \quad -\frac{\beta}{(4\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx r(x) e^{-\frac{1}{\beta} \partial^l \Theta^2 \partial^l} l(x),$$

donde la integración por partes nos ha permitido hacer el reemplazo $\partial^r \rightarrow -\partial^l$. Notemos que la expresión (V.4.13) puede ser obtenida de (V.4.6) reemplazando $r(x)$ con $f(x)$. Como en esa ocasión, es conveniente utilizar una expresión de la que se pueda leer el desarrollo en potencias de β ; utilizando siempre la notación introducida en la sección

5.1 para variables conmutantes y no conmutantes, obtenemos

$$(V.4.14) \quad - \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \frac{\beta^{b+1}}{(4\pi)^b \det \Xi} \\ \times \int_{\mathbb{R}^c} d\bar{x} \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} r(\bar{x}, \hat{x}) \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} e^{\frac{\beta}{4}(\hat{x}-\hat{y})\Xi^{-2}(\hat{x}-\hat{y})} l(\bar{x}, \hat{y}).$$

Sus contribuciones a los coeficientes a_{b+1} y a_{b+2} son no locales incluso en el sentido Moyal, análogas a las observadas en el párrafo 5.4.2:

$$(V.4.15) \quad a_{b+1} = - \frac{1}{(4\pi)^{d/2+b} \det \Xi} \int_{\mathbb{R}^c} d\bar{x} \left(\int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} r(\bar{x}, \hat{x}) \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} l(\bar{x}, \hat{y}) \right) + \dots, \\ a_{b+2} = - \frac{(\Xi^{-2})_{\mu\nu}}{4(4\pi)^{d/2+b} \det \Xi} \int_{\mathbb{R}^c} d\bar{x} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu r(\bar{x}, \hat{x}) \cdot \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} l(\bar{x}, \hat{y}) \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} r(\bar{x}, \hat{x}) \cdot \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} \hat{y}^\mu \hat{y}^\nu l(\bar{x}, \hat{y}) \right. \\ \left. - 2 \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} \hat{x}^\mu r(\bar{x}, \hat{x}) \int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} \hat{y}^\nu l(\bar{x}, \hat{y}) + \dots \right\}.$$

Estas contribuciones no locales a los coeficientes a_{b+1} y a_{b+2} , lineales en el producto $r(\hat{x}) l(\hat{y})$ y mencionadas en la obra de Vassilevich (2005), podrían afectar la renormalizabilidad de una TCC cuyo operador de fluctuaciones cuánticas fuera H en el caso⁵ $d/2 - b \geq 1$.

A continuación, utilizaremos los resultados que hemos establecido en esta sección para estudiar primero el NdC de un operador sobre el toro NC y luego el modelo de un campo escalar con una autointeracción cuártica en el ET euclídeo Moyal.

5.5. Toro no conmutativo

A diferencia de todos los operadores con los que hemos trabajado hasta este momento, los cuales han estado definidos sobre el ET euclídeo Moyal, en esta sección consideraremos un operador de la forma (V.2.2) sobre el toro no conmutativo T_\star^d de d dimensiones, definido como en el trabajo de Gayral, Iochum y Vassilevich (2007). De acuerdo a la notación establecida anteriormente, consideraremos coordenadas $x = (\bar{x}, \hat{x})$ sobre el toro T_\star^d que pueden ser separadas en componentes conmutantes $\bar{x} \in T^c$ y no conmutantes $\hat{x} \in T^{2b}$, con $d = c + 2b$. Además, tomaremos $0 \leq x_\mu \leq L_\mu$.

⁵Por cierto, tomaremos un potencial particular y demostraremos en la sección 5.6, a partir de (V.4.13), que estos inconvenientes y la llamada mezcla UV-IR son dos caras de la misma moneda (Gayral, Gracia-Bondia *et al.* 2005).

Teniendo presente que el toro es isomorfo a una región de \mathbb{R}^d a la cual se le imponen condiciones de periodicidad en los bordes, puede verificarse que el NdC $\langle y|e^{-\beta H}|x\rangle_{T_\star^d}$ del operador H en el toro puede ser escrito como la suma de infinitas amplitudes de transición $\langle y + t_k|e^{-\beta H}|x\rangle_{\mathbb{R}^d}$ calculadas en todo el espacio \mathbb{R}^d ,

$$(V.5.1) \quad \langle y|e^{-\beta H}|x\rangle_{T_\star^d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle y + t_k|e^{-\beta H}|x\rangle_{\mathbb{R}^d},$$

donde $t_k = (L_1 k_1, \dots, L_d k_d)$ y $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$. Haciendo un ligero abuso de notación, hemos llamado H a dos operadores diferentes: al de la parte izquierda, definido sobre el toro, y a su extensión periódica en \mathbb{R}^d , el de la derecha; de más está decir que los potenciales $l(x)$ y $r(x)$ también deben ser extendidos periódicamente.

De esta manera, hemos reducido el problema al ya resuelto de encontrar amplitudes de transición en \mathbb{R}^d . Para encontrar un desarrollo de (V.5.1) en potencias del tiempo propio basta unir nuevamente las expresiones obtenidas para la amplitud de transición y la FG en teorías NC, cfr. (V.2.9) y (V.3.6), recordando la periodicidad del potencial. Con este método obtenemos para la contribución de volumen, correspondiente a $n = 0$ en (V.2.9), el valor

$$(V.5.2) \quad \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \prod_{i=1}^d L_i \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-\frac{L_i^2}{4\beta} k^2} \sim \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} L_1 \dots L_d \\ = \frac{V_{T_\star^d}}{(4\pi\beta)^{d/2}}.$$

Efectivamente, todos los términos con $k \neq 0$ son exponencialmente decrecientes y no aportan al desarrollo asintótico para β pequeño. Este resultado coincide con el del caso conmutativo.

Por otro lado, la contribución al NdC del toro que se obtiene de tomar el término con $n = 1$ en (V.2.9), utilizando la periodicidad tanto de $l(x)$ como de $r(x)$ para reemplazar ∂^r por $-\partial^l$, es

$$(V.5.3) \quad -\frac{\beta}{(4\pi\beta)^{d/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{T^d} dx r(x) e^{-\frac{1}{\beta}(-i\Theta\partial + \frac{1}{2}t_k)^2} l(x).$$

La convergencia de esta serie no ha podido ser establecida en general, debido a que $(-i\Theta\partial + \frac{1}{2}t_k)$ podría anularse o estar indefinidamente cerca de hacerlo. Para evitar este problema, ha sido analizado por Gayral, Iochum y Vassilevich (2007) el caso en el que los elementos de la matriz Θ satisfacen cierta condición Diofantina: bajo esta hipótesis la cantidad $|-i\Theta\partial + \frac{1}{2}t_k|$ supera siempre una cantidad no nula dada, ocasionando

que (V.5.3) se comporte como una exponencial $e^{-\frac{a}{\beta}}$ con $a > 0$ fijo y no contribuya al desarrollo asintótico.

5.6. Modelo $\lambda\varphi_\star^4$

Pasemos ahora a considerar, luego de haber establecido los resultados matemáticos generales, un modelo sencillo que podría tener implicancias al analizar el modelo estándar. Al igual que en el caso conmutativo, un caso simple de estudiar resulta ser el de un campo escalar y real φ con una autointeracción cuártica. Nos centraremos en esta sección en el cálculo de los coeficientes de SDW que nos permitirán analizar las correcciones de un bucle al propagador de este campo definido sobre el espacio euclídeo Moyal \mathbb{R}_\star^d . Su acción se escribe como la generalización \star de la correspondiente acción conmutativa,

$$(V.6.1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_\star^4,$$

donde por supuesto $\varphi_\star^4 := \varphi \star \varphi \star \varphi \star \varphi$.

Recordemos que la contribución de un bucle $\Gamma_{1\text{-bucle}}$ a la AE, como hemos explicado en la sección 2.2, puede ser obtenida en términos del operador que se obtiene al realizar la variación segunda de (V.6.1). Utilizando el método del tiempo propio de Schwinger, $\Gamma_{1\text{-bucle}}$ puede ser escrita como

$$(V.6.2) \quad \begin{aligned} \Gamma_{1\text{-bucle}} &= \frac{1}{2} \log \text{Det} \left\{ -\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{3!} [L(\phi_\star^2) + R(\phi_\star^2) + L(\phi)R(\phi)] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta} e^{-\beta m^2} \text{Tr} e^{-\beta \left\{ -\partial^2 + \frac{\lambda}{3!} [L(\phi_\star^2) + R(\phi_\star^2) + L(\phi)R(\phi)] \right\}}. \end{aligned}$$

Notemos que para controlar posibles divergencias ultravioletas, hemos introducido un parámetro de corte Λ como regularizador. Asimismo, tal y como sucedía en el modelo $\lambda\phi_\star^3$, cfr. (V.1.15), hay contribuciones al potencial que involucran productos Moyal a derecha y a izquierda.

El recorrido a partir de este momento es seguramente claro: la traza contenida en (V.6.2) puede ser reemplazada por la fórmula (V.4.2). Dado que estamos interesados en estudiar el propagador, el cual se obtiene de los términos cuadráticos en el campo de la AE, sólo será necesario tener en cuenta los términos de (V.6.2) lineales en λ . Frente a este razonamiento, el problema se torna más sencillo de lo que nos podríamos haber imaginado en un primer momento, por cuanto podremos utilizar la fórmula (V.4.2) para obtener las contribuciones de cada uno de los términos $L(\phi_\star^2)$, $R(\phi_\star^2)$ y $L(\phi)R(\phi)$ por separado. Reemplazando $f(x) \equiv 1$, $\bar{\Theta} = 0$ y $r(x) \equiv 1$ en el término correspondiente a $n = 1$ de

(V.4.2), obtenemos la contribución de $L(\phi_\star^2)$ a la AE. Semejantemente se puede obtener el aporte de $R(\phi_\star^2)$, con la diferencia que en esta ocasión debe fijarse $l(x) \equiv 1$. Eventualmente, ambas contribuciones resultan iguales entre sí y su suma es

$$(V.6.3) \quad \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta e^{-\beta m^2} \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \frac{\lambda}{3!} \phi_\star^2(x) = \\ = \frac{\lambda}{3!} \frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2, m^2/\Lambda^2) \int_{\mathbb{R}^d} \phi^2,$$

donde $\Gamma(\cdot, \cdot)$ es la función gama incompleta (Abramowitz y Stegun 1964).

Si intentáramos deshacernos del parámetro de corte tomando el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ en (V.6.3), encontraríamos que la expresión divergería como $\log \Lambda$, para $d = 2$, o como Λ^{d-2} , para $d > 2$. Esto no debería sorprendernos, ya que estas contribuciones no dependen de los parámetros de no conmutatividad: corresponden a las denominadas contribuciones planares y son idénticos a las que se obtienen en el caso conmutativo. En conformidad con ello, la divergencia podría ser eliminada siguiendo el proceso usual de renormalización, el cual consiste en la absorción de la parte divergente en una redefinición de la masa.

La contribución restante, asociada al término $L(\phi)R(\phi)$, introduce novedades con respecto al caso conmutativo. Reemplazando $f(x) \equiv 1$, $\bar{\Theta} \equiv 0$ y $\partial^l = -\partial^r$ en el término correspondiente a $n = 1$ de (V.4.2) obtenemos

$$(V.6.4) \quad \frac{1}{2} \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta e^{-\beta m^2} \frac{1}{(4\pi\beta)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \frac{\lambda}{3!} \phi(x) e^{-\frac{1}{\beta} \partial \Theta^2 \partial} \phi(x) = \\ = \frac{\lambda}{12} (16\pi^3)^{-d/2} m^{d-2} \int d^c \bar{p} d^{2b} \hat{p} \tilde{\phi}^*(\bar{p}, \hat{p}) \tilde{\phi}(\bar{p}, \hat{p}) \cdot \Sigma_{NP}(\hat{p}),$$

donde, por cuanto en el espacio transformado de Fourier la acción del producto Moyal se simplifica notablemente, en la fórmula (V.6.4) hemos escrito la contribución a la AE en términos de la transformada de Fourier del campo $\phi(\tilde{p}, \hat{p})$ y las variables \bar{p} y \hat{p} , duales de Fourier de las coordenadas conmutantes \bar{x} y no conmutantes \hat{x} introducidas en (V.1.8). Asimismo, hemos definido

$$(V.6.5) \quad \Sigma_{NP}(\hat{p}) := \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^{d/2}} e^{-\beta - \frac{m^2}{\beta} |\Xi \hat{p}|^2} = 2(m|\Xi \hat{p}|)^{1-d/2} K_{d/2-1}(2m|\Xi \hat{p}|)$$

en términos de $K_{d/2-1}(\cdot)$ la función de Bessel modificada (Abramowitz y Stegun 1964).

El punto clave a notar en (V.6.4) es que, gracias al término asociado a la matriz no degenerada Ξ , la integral en (V.6.5) converge para $\beta \rightarrow 0$. En otras palabras, la no conmutatividad regulariza en este caso las divergencias ultravioletas al orden de un bucle y el parámetro de corte Λ puede ser removido sin inconvenientes. Como era de esperar, se puede demostrar que la expresión (V.6.4) corresponde al resultado que arrojan los diagramas de un bucle no planares.

Continuando el análisis de la expresión (V.6.4), podemos escribir en forma precisa el desarrollo de $\Sigma_{NP}(\hat{p})$ para pequeños momentos \hat{p} como

$$(V.6.6) \quad \Sigma_{NP}(\hat{p}) = \begin{cases} (d/2 - 2)!(m|\Xi\hat{p}|)^{2-d} (1 + O(|\hat{p}|^2)) \\ \quad + \frac{2(-1)^{d/2}}{(d/2-1)!} \log(m|\Xi\hat{p}|) (1 + O(|\hat{p}|^2)) & , \quad d > 2 \\ -2 [\log m|\Xi\hat{p}| + \gamma] (1 + O(|\hat{p}|^2)), & d = 2, \end{cases}$$

donde γ es la constante de Euler. El resultado de (V.6.6) evaluado en $d = 4$ y $\Theta = \Xi$ ($c = 0$) corresponde a la contribución a la AE calculada por Minwalla *et al.* (2000) considerando diagramas no planares.

Por otro lado, la convergencia de la integral (V.6.4) en los impulsos depende del número de coordenadas conmutativas. En efecto, $\Sigma_{NP}(\hat{p})$ es del orden de $|\hat{p}|^{-d+2}$ para impulsos pequeños si suponemos que d es mayor a dos; ergo, siempre que no requiramos a los campos un comportamiento especial en el origen, el integrando crece como $|\hat{p}|^{1-c}$ para impulsos \hat{p} pequeños, donde $c = d - 2b$ es el número de coordenadas conmutativas. Si este número c iguala o excede a dos, esta contribución de un bucle a la AE se vuelve divergente IR.

Análogas conclusiones se pueden obtener a partir de la expresión (V.4.14), cuyo término principal en un desarrollo en potencias de β es

$$(V.6.7) \quad - \frac{\lambda}{3! (4\pi\beta)^{d/2}} \cdot \frac{\beta^{b+1}}{(4\pi)^b \det \Xi} \int_{\mathbb{R}^c} d\bar{x} \left(\int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{x} \phi(\bar{x}, \hat{x}) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^{2b}} d\hat{y} \phi(\bar{x}, \hat{y}) \right).$$

Si introduyésemos este resultado en la última línea de la fórmula (V.6.2), el integrando se comportaría como $\beta^{-c/2}$ para pequeños β y la integral divergería al tomar el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ en caso de que c fuera mayor o igual a dos. Esta divergencia UV es evidentemente no local, visto que no lo es siquiera en sentido Moyal, y por ende no puede ser eliminada con un término local en el lagrangiano.

Ergo, resta establecer qué valores pueden ser tomados por c , el número de coordenadas conmutativas, en una teoría con significado

físico. Para ello, podemos seguir el siguiente razonamiento: es ya sabido que la matriz S de teorías con tiempos no conmutativos resulta ser no unitaria (Chaichian, Demichev *et al.* 2001, Gomis y Mehen 2000, Seiberg, Susskind *et al.* 2000). Si proponemos entonces esta teoría en un ET de dimensión par, digamos $d = 4$, el principio de unitariedad de la matriz S , sumado a la antisimetría de la matriz de no conmutatividad Θ , impone que al menos dos coordenadas deben ser conmutativas ($c \geq 2$). Dando esto por válido, tal y como hemos visto, algunos diagramas no planares generan divergencias que no pueden ser removidas a través de la redefinición de los parámetros de la teoría (Gayral, Gracia-Bondia *et al.* 2005); en el mejor de los casos, habría que agregar términos que tuvieran la forma no local de aquellos divergentes, y aguardar la renormalizabilidad de la teoría resultante.

Finalmente, para un valor genérico c el tipo de divergencias IR encontrado en (V.6.6) aparece tarde o temprano al considerar diagramas con un número creciente de bucles. Puesto que hemos eliminado las divergencias UV a costas de encontrarnos con otras IR, el problema ha sido bautizado en la literatura (Minwalla *et al.* 2000) como mezcla ultravioleta-infrarroja (UV-IR). Este resultado muestra que para ciertas teorías NC, la integración de variables internas de momento en el cálculo de diagramas de Feynman puede generar divergencias para valores pequeños de las variables externas de momento, incluso para campos masivos. Se fomentó así la creencia en la comunidad de que la renormalizabilidad de todas estas teorías estaría comprometida. Sin embargo, el modelo de Grosse-Wulkenhaar, al cual nos abocaremos en el próximo capítulo, echó por tierra estas ideas.

Anexos

5.A. Teoría cuántica de campos no conmutativa con potenciales centrales

En este anexo estudiaremos el operador de fluctuaciones cuánticas para un campo escalar real $\varphi(t, x)$, definido sobre un espacio descrito por las variables $x_0 \in \mathbb{R}$ y $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, el tiempo Minkowskiano y las coordenadas en el plano Moyal respectivamente, que interactúa con un potencial central de fondo⁶ $V(r^2 = x_i x^i)$. En este caso no haremos uso de los resultados obtenidos en el transcurso del capítulo haciendo uso del FLM; la intención es mostrar algunas de las particularidades que poseen los operadores no locales con los que se trabaja en TCC NC. La acción que consideraremos es

$$(V.A.1) \quad S[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2} dx \left\{ (\partial_0 \varphi)^2 - (\partial_i \varphi)^2 - m^2 \varphi^2 - V \star \varphi \star \varphi \right\} .$$

Como ya hemos explicado, el producto Moyal permite implementar la no conmutatividad de los operadores coordenada en el espacio usual de funciones de las coordenadas. Asimismo, la propiedad cíclica del producto \star implica que es irrelevante la posición de V respecto a φ en el término de potencial de (V.A.1), evitando posibles ambigüedades en su definición.

De acuerdo a los resultados perturbativos establecidos en (II.2.13), la AE correspondiente a (V.A.1), al orden de un bucle, es

$$(V.A.2) \quad \Gamma[\phi] = S[\phi] + \frac{1}{2} \log \text{Det} \left\{ \delta_\phi^2 S \right\} .$$

El operador de fluctuaciones cuánticas $\delta_\phi^2 S$ está definido como la variación segunda de la acción evaluada en el campo medio ϕ ; tal y como sucedía en los demás ejemplos NC, la variación del término de potencial debe ser llevada a cabo cuidadosamente por la presencia del producto \star y genera más de una contribución. En concreto,

$$(V.A.3) \quad \delta_\phi^2 S := -\partial_0^2 - m^2 - A ,$$

⁶Utilizaremos índices latinos para referirnos a las componentes espaciales.

donde por practicidad hemos introducido el operador A , relacionado únicamente a las variables espaciales y poseedor de un espectro que determinaremos en breve:

$$(V.A.4) \quad A := -\partial_i^2 + \frac{1}{2} V(x_i^+ x_i^+) + \frac{1}{2} V(x_i^- x_i^-).$$

Los operadores $x_i^\pm = (x_i \mp i\Theta^{ij}\partial_j)$ en (V.A.4), resultantes del corrimiento de Bopp, son análogos a los introducidos en las líneas posteriores a la expresión (V.2.2) en el espacio de fases.

Para obtener provecho de la dependencia funcional del potencial, conviene introducir los operadores no hermíticos

$$(V.A.5) \quad a_\pm := \frac{1}{2\sqrt{\theta}}(x_1^\pm \mp ix_2^\pm),$$

los cuales satisfacen un álgebra de operadores de creación y destrucción. Efectivamente, sus únicos conmutadores no nulos son

$$(V.A.6) \quad [a_+, a_+^\dagger] = [a_-, a_-^\dagger] = 1.$$

Los beneficios de trabajar con ellos resultan evidentes al introducir los operadores número $N_\pm := a_\pm^\dagger a_\pm$, puesto que son hermíticos y en su base de autovectores los términos de potencial son diagonales. Por fortuna, el Laplaciano también puede ser escrito como combinación cuadrática de los operadores a^\pm , resultando

$$(V.A.7) \quad \theta A = N_+ + N_- + 1 - a_+^\dagger a_-^\dagger - a_+ a_- + \frac{\theta}{2} \{V(2\theta(2N_+ + 1)) + V(2\theta(2N_- + 1))\}.$$

Por otra parte, en términos de estos operadores el operador L de momento angular se puede escribir como

$$(V.A.8) \quad L := -i\epsilon_{ij}x_i\partial_j = N_+ - N_-.$$

Conviene notar que L es también el generador de las rotaciones en las nuevas coordenadas x^\pm , a saber, $[L, x_i^\pm] = i\epsilon_{ij}x_j^\pm$. Esto sugiere la descomposición del espacio de funciones de cuadrado integrable en el plano como una suma de espacios de Fock $\mathcal{F}^{\pm l}$ con momento angular definido⁷

$$L_2(\mathbb{R}^2) = \mathcal{F}^0 \oplus_{l=1}^\infty \mathcal{F}^l \oplus_{m=1}^\infty \mathcal{F}^{-m}.$$

Como es habitual, las funciones normalizadas que conforman la base en cada uno de los espacios de Fock $\mathcal{F}^{\pm l}$ se pueden construir en la forma

$$(V.A.9) \quad \phi_n^{\pm l}(x) = \frac{1}{\sqrt{(n+l)!n!}} (a_\pm^\dagger)^{n+l} (a_\mp^\dagger)^n \phi_0^0(x),$$

⁷De aquí en adelante tomaremos $l \in \mathbb{Z}^+$.

donde $\phi_0^0(x)$ está definido por las ecuaciones $a_+ \phi_0^0(x) = a_- \phi_0^0(x) = 0$. Por supuesto, éstas resultan ser autofunciones de los operadores número N_\pm con autovalores $n + l$ y n . Empleando la definición (V.A.5) en la expresión (V.A.9) encontramos luego de algunas manipulaciones algebraicas las autofunciones normalizadas

$$(V.A.10) \quad \phi_n^{\pm l}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi\theta^{l+1}}} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+l)!}} r^l e^{-\frac{r^2}{2\theta}} L_n^l(r^2/\theta) e^{\pm il\varphi},$$

donde $L_n^l(\cdot)$ son los polinomios de Laguerre generalizados y r, φ son las coordenadas polares de $x \in \mathbb{R}^2$.

La dificultad en la resolución del problema de autovalores para A dependerá de la forma explícita del potencial V . En el Anexo 5.B, obtendremos el espectro del operador de fluctuaciones cuánticas para un potencial central específico, en lo que llamaremos el problema del disco NC.

5.B. El disco no conmutativo

Uno de los principales inconvenientes para construir una TCC sobre variedades con borde es la interpretación misma del término borde: en una geometría granulada como el plano NC, referirnos a un borde como un conjunto de puntos no parece ser la génesis adecuada. Una opción es asirse del método del potencial confinante utilizado en teorías conmutativas, el cual se puede generalizar al caso NC mediante el producto Moyal \star .

A modo de ejemplo, para definir el disco NC en \mathbb{R}^2 utilizamos un campo escalar cuya acción es de la forma (V.A.1) con un potencial

$$(V.B.1) \quad V(r^2) := \frac{2\Lambda}{\theta} \Theta(r^2 - R^2),$$

donde $\Theta(\cdot)$ es la función escalón definida como uno si su argumento es mayor o igual a cero y se anula en caso contrario. Este potencial de fondo representa una barrera cilíndrica de radio R y altura 2Λ (en unidades de θ^{-1}); en el caso conmutativo y en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ es tal que confina al campo a vivir en el disco de radio R . Dicho límite, tomado en el caso no conmutativo, es nuestro punto de partida para la definición del disco no conmutativo.

Reemplazando (V.B.1) en (V.A.7) encontramos la siguiente expresión para A_N^Λ , la parte espacial del operador de fluctuaciones cuánticas:

$$(V.B.2) \quad \begin{aligned} \theta A_N^\Lambda = & N_+ + N_- + 1 - a_+^\dagger a_-^\dagger - a_+ a_- \\ & + \Lambda \{ \Theta(N_+ - N) + \Theta(N_- - N) \}, \end{aligned}$$

donde N es el menor entero mayor o igual a $R^2/4\theta - 1/2$ o, haciendo uso de la función techo $\lceil \cdot \rceil$,

$$(V.B.3) \quad N := \lceil R^2/4\theta - 1/2 \rceil.$$

Explotando la simetría rotacional del operador A_N^Λ , podemos determinar su espectro en cada uno de los subespacios de Fock $\mathcal{F}^{\pm l}$; con este objetivo, proponemos para las autofunciones $\psi_\lambda^{\pm l}(x)$ de A_N^Λ con autovalor $\frac{\lambda}{\theta}$ un desarrollo en términos de las funciones (V.A.10) con momento angular l definido,

$$(V.B.4) \quad \psi_\lambda^{\pm l}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^l(\lambda) \phi_n^{\pm l}(x).$$

Empleando esta serie la ecuación de autovalores para A_N^Λ se convierte en una relación de recurrencia entre los coeficientes $c_n^l(\lambda)$. No reviste importancia el conocer la forma precisa de la relación de recurrencia; intuitivamente se puede comprender de (V.B.2) que para $\Lambda \rightarrow \infty$ las soluciones son posibles sólo si los argumentos de las funciones Heaviside son negativos o lo que es lo mismo, recordando cómo actúan N_\pm sobre las funciones $\phi_n^{\pm l}(x)$, si $l < N$ y las componentes $c_n^l(\lambda)$ se anulan para $n \geq N - l$. El resultado exacto es (Falomir, Franchino Viñas *et al.* 2013)

$$(V.B.5) \quad c_n^l(\lambda) = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+l)!}} L_n^l(\lambda), \quad \text{para } l < N \text{ y } n < N - l.$$

Visto que sobre las componentes c_n^l pesa la relación de recurrencia y deben ser nulas si $n \geq N - l$, necesariamente debe cumplirse

$$(V.B.6) \quad L_{N-l}^l(\lambda) = 0.$$

Es consabido que el polinomio L_{N-l}^l posee $N - l$ raíces λ_k^l (Abramowitz y Stegun 1964); ello implica que el operador $A_N^\infty = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} A_N^\Lambda$ está definido en un espacio de Hilbert de dimensión N^2 . Desde el punto de vista semiclásico, esto corresponde a la existencia de una celda de volumen mínimo $(4\pi\theta)^2$ fijado por la relación de conmutación $[x_i^\pm, x_j^\pm] = \mp 2i\theta \epsilon_{ij}$. Efectivamente, al estar limitado por las condiciones $x_\pm^2 \leq R^2$, el volumen accesible en el espacio de fases clásico es $(\pi R^2)^2$. El número de estados posibles se obtiene entonces como el número de celdas mínimas que caben en dicho volumen, esto es $(R^2/4\theta)^2 \sim N^2$ en el límite semiclásico $\theta \ll R^2$. La existencia de un número finito de estados es un hecho que había sido ya notado para el caso de la esfera difusa (Madore 1992) y el disco difuso (Lizzi *et al.* 2005, 2006).

Los autovalores y autofunciones del operador A_N^∞ presentan varias características interesantes que pueden ser consultadas en la publicación de Falomir, Franchino Viñas *et al.* (2013). A modo de ejemplo,

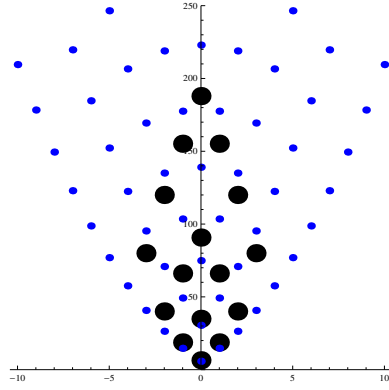


FIGURA 5.B.1. Los puntos grandes representan el espectro de A_N^∞ para $\theta = 0,05$ ($N = 4$) en función del momento angular. Los puntos pequeños corresponden al espectro del disco conmutativo. R es tomado como la longitud unidad.

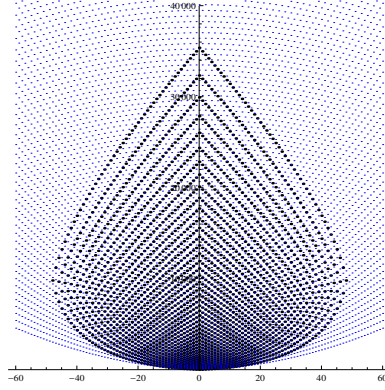


FIGURA 5.B.2. Los puntos que conforman la gota representan el espectro de A_N^∞ para $\theta = 0,005$ ($N = 49$) en función del momento angular. Los puntos en el fondo corresponden al espectro del disco conmutativo. R es tomado como la longitud unidad.

en las Figuras 5.B.1 y 5.B.2 se puede apreciar la comparación de los espectros del laplaciano en el disco conmutativo y NC para dos valores de θ .

5.B.1. Energía de Casimir para el disco no conmutativo.

Una de las curiosidades que presenta el disco NC es que, al existir solo un número finito de autovectores de A_N^∞ , su energía de Casimir no precisa ser regularizada. Para mostrarlo, tengamos presente que los modos de oscilación cuánticos $\psi_n(t, x)$ para un campo escalar en el disco NC son los modos cero del problema

$$(V.B.7) \quad \delta^2 S \cdot \psi_n(t, x) = \{-\partial_t^2 - m^2 - A_N^\infty\} \psi_n(t, x) = 0.$$

La solución a este problema se reduce, realizando la transformada de Fourier en la variable temporal, a la identificación de las autofunciones $\psi_n(x)$ del operador A_N^∞ :

$$(V.B.8) \quad \psi_n(t, x) = e^{-i\omega_n t} \psi_n(x).$$

Por cuanto conocemos los autovalores de A_N^∞ , dados por la expresión (V.B.6), obtenemos las frecuencias

$$(V.B.9) \quad \omega_k^{\pm l} := \sqrt{m^2 + \frac{\lambda_k^l}{\theta}},$$

donde $L_{N-l}^l(\lambda_k^l) = 0$, para $l = 0, 1, \dots, N-1$ y $k = 1, 2, \dots, N-l$.

Como hemos explicado en la sección 2.4 del capítulo 2, la energía de Casimir E_{NC} es la semisuma de las energías ω_k de los modos de oscilación:

$$\begin{aligned}
 \text{(V.B.10)} \quad E_{NC} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k^0 + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-l} \omega_k^l \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k^0 + \theta m^2} + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-l} \sqrt{\lambda_k^l + \theta m^2}.
 \end{aligned}$$

Visto que el espacio de Hilbert de las oscilaciones cuánticas es de dimensión finita, la energía de Casimir del disco NC es correspondientemente finita. En el caso de masa nula, podemos obtener el límite asintótico para N grande

$$\begin{aligned}
 \text{(V.B.11)} \quad E_{NC} &= \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k^0} + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-l} \sqrt{\lambda_k^l} \\
 &\simeq \frac{c}{R} N^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Una primera estimación, la cual otorga el resultado $0,69 < c < 1,11$, se puede calcular utilizando las siguientes cotas para las raíces de los polinomios de Laguerre (Gatteschi 2002, Ifantis y Siafarikas 1985):

$$\text{(V.B.12)} \quad \frac{2k+l+1}{\sqrt{N-l/2+1/2}} > \sqrt{\lambda_k^l} > \frac{\pi k+l-1/2}{\sqrt{4N-2l+2}}.$$

CAPÍTULO 6

El modelo de Grosse-Wulkenhaar

*At every single moment of one's life
one is what one is going to be no
less than what one has been. Art is
a symbol, because man is a symbol.*

– OSCAR WILDE, *De Profundis*.

Casi un lustro después de la publicación del trabajo de Minwalla *et al.* (2000), en el cual se pone en relieve el problema inherente la mezcla de divergencias UV-IR en TCC NC, Grosse y Wulkenhaar mostraron a través de un ejemplo la existencia de teorías NC renormalizables (Grosse y Wulkenhaar 2003, 2005). Para ello introdujeron, en el modelo del tipo $\lambda \phi_\star^4$ que recibe su nombre (GW), un término armónico de fondo que modifica el propagador libre. Con ello recuperan la dualidad de Langmann-Szabo (Langmann y R. J. Szabo 2002) a costo de romper la invariancia de translación. El lagrangiano resultante ha sido interpretado a posteriori como fruto de la interacción con la curvatura en un espacio NC (Buric y Wohlgenannt 2010, Goursac 2010).

Las propiedades sobre este modelo que se van descubriendo día a día son cada vez más prometedoras. Primeramente, se mostró su renormalizabilidad a todo orden en teoría de perturbaciones (Grosse y Wulkenhaar 2003, 2005, Rivasseau *et al.* 2006); luego, encontraron que la constante de acoplamiento poseía una función β que se anulaba en el punto autodual, descartando así la posible presencia del fantasma de Landau (Disertori, Gurau *et al.* 2007, Rivasseau 2007). Posteriormente se demostró su equivalencia, en el punto autodual y en el límite de extrema no conmutatividad o infinito volumen, a un modelo matricial exactamente soluble y no trivial (Grosse y Wulkenhaar 2014a). Esto ha sugerido que podría dar lugar a la construcción axiomática de una TCC en cuatro dimensiones (Grosse y Wulkenhaar 2013, 2014b). Párrafo aparte, también ha sido objeto de estudio en el marco del grupo de renormalización funcional, donde puede ser estudiado sin hacer truncamiento alguno (Sfondrini y Koslowski 2011).

En el capítulo anterior, hemos mostrado que el FLM es particularmente conveniente en el estudio de operadores no locales cuyos símbolos son funciones no polinomiales de los momentos, las variables duales de Fourier de las coordenadas. En efecto, utilizando IdC en el espacio de fases los cálculos son relativamente sencillos, por cuanto la dependencia no habitual en el momento aparece en pie de igualdad con la dependencia en las coordenadas.

Adaptaremos en este capítulo las técnicas del FLM al estudio del modelo de GW, modelo que será introducido en la sección 6.1. Siguiendo este enfoque, en el apartado 6.2 lograremos como resultado una fórmula magistral para la traza del NdC de operadores no locales con potenciales de fondo cuadráticos. Más aún, como veremos en la sección 6.3, la AE al orden de un bucle (a partir de la cual pueden construirse las funciones de Green de n puntos a idéntico orden) en cierto modo resultará ser un caso particular de esa fórmula magistral. Luego de analizar el comportamiento del modelo en el régimen UV mediante el cálculo de las funciones β , en las últimas dos secciones consideraremos dos variaciones: tomaremos una matriz Θ de no conmutatividad degenerada y un potencial armónico anisotrópico.

6.1. Definición del modelo de Grosse-Wulkenhaar

El modelo de GW se encuentra definido en el ET euclídeo Moyal de dimensión arbitraria d . Para definir este espacio, tal y como hemos detallado en la sección 5.1, debemos introducir el producto Moyal a través de la matriz de no conmutatividad Θ , vid. (V.1.6). A lo largo de esta sección, salvo que se explicita lo contrario¹, consideraremos una matriz Θ no degenerada. Adicionalmente, supondremos por el momento que los parámetros $\theta_{\mu=1,\dots,d}$ que definen los $d/2$ planos de no conmutatividad son todos iguales entre sí y a una constante² θ .

Hechas estas aclaraciones, introduzcamos el modelo de GW para un campo escalar real, definiéndolo a través del lagrangiano³

$$(VI.1.1) \quad \mathcal{L}_{GW} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_{\star}^4,$$

donde nuevamente $\varphi_{\star}^4 := \varphi \star \varphi \star \varphi \star \varphi$. La inclusión del producto \star en el término armónico implica sólo la aparición de una contribución adicional término cinético, y por ende puede ser obviada. La correspondiente

¹En la sección 6.4 analizaremos la situación más general, en la que Θ puede ser singular.

²Ver el comentario posterior a la ecuación (V.1.8).

³Nuestro parámetro ω está vinculado con el parámetro Ω presente en el lagrangiano original de Grosse y Wulkenhaar (2003) a través de la relación $\omega\theta = \Omega$.

acción clásica es por lo tanto

$$(VI.1.2) \quad S_{GW}[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^d} dx \left(\frac{1}{2} \varphi G_{GW} \varphi + \frac{\lambda}{4!} \varphi_{\star}^4 \right),$$

donde hemos definido el operador G a partir del cual, por motivos que más adelante serán expuestos, realizaremos las perturbaciones:

$$(VI.1.3) \quad G_{GW} := -\partial^2 + m^2 + \omega^2 x^2.$$

Como es usual, podemos escribir la corrección de un bucle a la AE en función del operador de fluctuaciones cuánticas $\delta^2 S_{GW}$, calculado como la variación segunda de la acción con respecto al campo cuántico φ y evaluada en el campo medio ϕ :

$$(VI.1.4) \quad \begin{aligned} \delta^2 S_{GW} &= G_{GW} + \frac{\lambda}{3!} [L(\phi_{\star}^2) + R(\phi_{\star}^2) + L(\phi)R(\phi)] \\ &= G_{GW} + \frac{\lambda}{3!} [\phi_{\star}^2(x + i\Theta\partial) + \phi_{\star}^2(x - i\Theta\partial) \\ &\quad + \phi(x + i\Theta\partial)\phi(x - i\Theta\partial)]. \end{aligned}$$

Ciertamente, como se puede ver comparando las expresiones (V.6.2) y (VI.1.4), la diferencia con el caso considerado en la sección 5.6 reside en el término harmónico que contiene el operador G_{GW} . Utilizando también en esta ocasión la representación del determinante funcional en términos del tiempo propio de Schwinger, la acción efectiva Γ_{GW} al orden de un bucle se puede escribir

$$(VI.1.5) \quad \Gamma_{GW}[\phi] = S_{GW}[\phi] - \frac{1}{2} \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta} \text{Tr} e^{-\beta \{\delta^2 S_{GW}\}}.$$

Hemos regularizado la expresión utilizando un parámetro Λ de corte UV, puesto que en esta marco las divergencias UV de los diagramas de Feynman provienen de las divergencias de la integral en (VI.1.5) para $\beta \rightarrow 0$. En la siguiente sección, mostraremos cómo calcular la traza del NdC del operador no local $\delta^2 S_{GW}$ adaptando la formulación, estudiada en el capítulo previo, de IdC en el espacio de fases de una partícula puntual.

6.2. Núcleo de calor de operadores con un término harmónico

Tomemos como punto de partida un operador no local H que actúa sobre funciones de $x \in \mathbb{R}^d$ en la forma

$$(VI.2.1) \quad H := -\partial^2 + m^2 + \omega^2 x^2 + V(x, -i\partial).$$

El operador no local V es en este punto arbitrario y, llegado el caso, será elegido apropiadamente para que H coincida con $\delta^2 S_{GW}$.

A esta altura, resultará natural al lector reconocer al NdC $e^{-\beta H}$ como el operador evolución, en tiempo euclídeo β , de una partícula puntual moviéndose en \mathbb{R}^d bajo la acción del hamiltoniano no local H . Por ende, el NdC puede ser escrito en términos de IdC en mecánica cuántica que, dada la no localidad del operador, conviene dejar expresadas como integrales en el espacio de fases. En resumen, siendo nuestro interés el cálculo de la traza del NdC, la formulación usual conduce a la siguiente integral sobre trayectorias periódicas (t.p.)

$$(VI.2.2) \quad \text{Tr } e^{-\beta H} = e^{-\beta m^2} \mathcal{N}(\beta) \int_{t.p.} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{-\mathcal{S}[q(t), p(t)]} \times \\ \times e^{-\beta \int_0^1 dt V_W(\sqrt{\beta} q(t), p(t)/\sqrt{\beta})},$$

donde $\mathcal{N}(\beta)$ es una constante de proporcionalidad que será luego determinada a partir de una traza conocida, y \mathcal{S} es la acción euclídea de un oscilador armónico en el espacio de fases \mathbb{R}^{2d} , una funcional cuadrática en los caminos de la posición y el momento:

$$(VI.2.3) \quad \mathcal{S}[q(t), p(t)] := \int_0^1 dt \{p(t)^2 - ip(t)\dot{q}(t) + \omega^2 \beta^2 q(t)^2\}.$$

Antes de proseguir conviene realizar algunas aclaraciones sobre la expresión (VI.2.2). Primero, notemos que hemos realizado el reescalo habitual en las variables de la IdC, $t \rightarrow \beta t$, $q(t) \rightarrow \sqrt{\beta} q(t)$ y $p(t) \rightarrow p(t)/\sqrt{\beta}$, de modo que las trayectorias $p(t)$, $q(t)$ y el parámetro t son ahora adimensionales. En la constante de proporcionalidad $\mathcal{N}(\beta)$ absorberemos eventuales factores provenientes de la medida de integración.

Segundo, en concordancia con la prescripción del punto medio para integrales de camino, la función V_W se obtiene reemplazando los operadores x y $-i\partial$ por $\sqrt{\beta} q(t)$ y $p(t)/\sqrt{\beta}$, respectivamente, en la expresión del potencial $V(x, -i\partial)$ ordenada según Weyl. Esto implica que deberíamos simetrizar el operador no local $V(x, -i\partial)$ con respecto a x y $-i\partial$ antes de reemplazarlos por las trayectorias $q(t)$ y $p(t)$. Afortunadamente, de acuerdo al análisis precedente a (V.2.3), el operador (VI.1.4) puede ser reexpresado en forma simétrica sin introducir términos adicionales.

Por último, hemos mencionado que la integral de (VI.2.2) es realizada sobre trayectorias $q(t)$ y $p(t)$ periódicas, es decir tales que cumplen $q(0) = q(1)$ y $p(0) = p(1)$. Si nos hubieramos propuesto obtener el NdC $\langle x' | e^{-\beta H} | x \rangle$, podríamos haber simplemente integrado sobre trayectorias cuya proyección en el espacio de configuración satisficiera las

condiciones de borde⁴ $q(0) = x$ y $q(1) = x'$. La traza podría desde luego obtenerse a partir de la expresión resultante, tomando $x = x'$ e integrando sobre la variable x . En el caso que nos respecta resulta suficiente ojear el apéndice 6.B, donde consideramos condiciones de contorno tipo Dirichlet, para convencerse de que el cálculo haciendo uso de condiciones periódicas resulta más elegante.

Habiendo compartido estas consideraciones, definimos los valores de expectación de una funcional $f[q(t), p(t)]$ en la forma habitual (VI.2.4)

$$\langle f[q(t), p(t)] \rangle_{\text{per}} := \mathcal{Z}(\omega\beta)^{-1} \int_{t,p.} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{-\mathcal{S}[q(t), p(t)]} f[q(t), p(t)],$$

eligiendo la constante de normalización $\mathcal{Z}(\omega\beta)$ de modo tal que se cumpla $\langle 1 \rangle = 1$. Como veremos en poco, la dependencia funcional de $\mathcal{Z}(\omega\beta)$ con $\omega\beta$ carece de importancia. También nos será de utilidad la introducción de la funcional generatriz $Z_{\text{per}}[k, j]$ evaluada en las fuentes k y j :

$$(VI.2.5) \quad Z_{\text{per}}[k(t), j(t)] := \left\langle e^{\int_0^1 dt \{k(t)p(t) + j(t)q(t)\}} \right\rangle_{\text{per}}.$$

En forma concisa, la traza (VI.2.2) puede ahora escribirse en términos del valor medio de la exponencial del potencial

$$(VI.2.6) \quad \text{Tr} e^{-\beta H} = e^{-\beta m^2} \mathcal{N}(\beta) \mathcal{Z}(\omega\beta) \left\langle e^{-\beta \int_0^1 dt V_W(\sqrt{\beta}q(t), p(t)/\sqrt{\beta})} \right\rangle_{\text{per}}.$$

Por otro lado, el producto de las constantes de proporcionalidad y normalización $\mathcal{N}(\beta) \mathcal{Z}(\omega\beta)$ puede ser determinada por el valor conocido de la traza del NdC para el oscilador armónico en un espacio d dimensional. En efecto, tomando $m = V_W = 0$ en la expresión (VI.2.6) obtenemos

$$(VI.2.7) \quad \text{Tr} e^{-\beta \{-\partial^2 + \omega^2 x^2\}} = \mathcal{N}(\beta) \mathcal{Z}(\omega\beta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\beta\omega(n+1/2)} \right)^d = \frac{1}{(2 \sinh \omega\beta)^d}.$$

El paso siguiente consiste en hacer el desarrollo de la expresión (VI.2.6) en potencias de V_W , imitando el cálculo perturbativo, en el número de vértices de los diagramas de Feynman, de una TCC en $0 + 1$ dimensiones. Asimismo, expresamos el resultado en términos de la transformada de Fourier $\tilde{V}_W(\cdot, \cdot)$ de la función $V_W(\cdot, \cdot)$ en sus dos variables, de modo que el único valor medio a calcular es la propia FG;

⁴En el anexo 6.A realizamos el cálculo de una cantidad local, el núcleo de la inversa del operador G_{GW} definido en (VI.1.3), utilizando esta técnica.

luego de trabajar un poco la expresión obtenemos

(VI.2.8)

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-\beta H} &= \frac{e^{-\beta m^2}}{(2 \sinh \omega \beta)^d} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\xi}_1 \dots \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{\sigma}_n d\tilde{\xi}_n \times \\ &\quad \times \tilde{V}_W(\sigma_1, \xi_1) \dots \tilde{V}_W(\sigma_n, \xi_n) \times K_{\beta}^{(n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n; \xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

donde las funciones $K_{\beta}^{(n)}$ que hemos introducido, utilizando la simetría en las variables t_i , pueden ser escritas como integrales de la FG⁵:

(VI.2.9)

$$K_{\beta}^{(n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n; \xi_1, \dots, \xi_n) := \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n Z_{\text{per}}[k_n(t), j_n(t)].$$

Por su parte, las fuentes k_n y j_n en las cuales debe evaluarse la FG, dependen de los tiempos t_i y están dadas por

$$\begin{aligned} (VI.2.10) \quad k_n(t) &:= i \beta^{-1/2} \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \xi_i, \\ j_n(t) &:= i \beta^{1/2} \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \sigma_i. \end{aligned}$$

El cálculo a partir de este momento resulta directo si notamos que la acción de la ec. (VI.2.3) para una partícula puntual es una funcional cuadrática en los caminos p y q , y puede ser reescrita como

$$(VI.2.11) \quad \mathcal{S}[q(t), p(t)] = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \begin{pmatrix} p(t) & q(t) \end{pmatrix} D_{\text{per}} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix},$$

valiéndonos del operador diferencial D_{per} hermítico que actúa sobre trayectorias periódicas tanto en p como en q de acuerdo a

$$(VI.2.12) \quad D_{\text{per}} := \begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 2\omega^2\beta^2 \end{pmatrix}.$$

Basta por consiguiente con completar cuadrados en la IdC asociada a la FG para deshacernos de las funcionales lineales de la trayectoria

⁵Notemos que el término $n = 0$ de la expresión (VI.2.8) debe ser tomado igual a 1.

presentes en el exponente y obtener la siguiente expresión cerrada:

(VI.2.13)

$$Z_{\text{per}}[k, j] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dt dt' \begin{pmatrix} k(t) & j(t) \end{pmatrix} G^{(\text{per})}(t - t') \begin{pmatrix} k(t') \\ j(t') \end{pmatrix} \right\};$$

el núcleo del operador inverso D_{per}^{-1} , $G^{(\text{per})}(t - t')$, está dado por la fórmula

$$(VI.2.14) \quad G^{(\text{per})}(\Delta) = \frac{1}{2 \sinh \omega \beta} \begin{pmatrix} G_{pp}^{(\text{per})} & G_{px}^{(\text{per})} \\ G_{xp}^{(\text{per})} & G_{xx}^{(\text{per})} \end{pmatrix},$$

donde sus componentes están definidas como⁶

$$(VI.2.15) \quad \begin{aligned} G_{pp}^{(\text{per})} &:= \omega \beta \cosh [\omega \beta (2|\Delta| - 1)], \\ G_{px}^{(\text{per})} &:= i \epsilon(\Delta) \sinh [\omega \beta (2|\Delta| - 1)], \\ G_{xp}^{(\text{per})} &:= -i \epsilon(\Delta) \sinh [\omega \beta (2|\Delta| - 1)], \\ G_{xx}^{(\text{per})} &:= \frac{1}{\omega \beta} \cosh [\omega \beta (2|\Delta| - 1)]. \end{aligned}$$

Entre otras propiedades, podemos mencionar que $G^{(\text{per})}(t - t')$ es simétrico y, como es de esperar teniendo en cuenta que su dominio de definición es el de las trayectorias periódicas, depende sólo de la diferencia $\Delta := t - t'$.

Finalmente, evaluando la FG en las fuentes $k_n(t)$ y $j_n(t)$, dadas por (VI.2.10), y utilizando nuevamente la simetría en las variables temporales t_i , podemos escribir para las funciones $K_\beta^{(n)}$ la fórmula

(VI.2.16)

$$\begin{aligned} K_\beta^{(n)}(\sigma_1, \dots, \sigma_n; \xi_1, \dots, \xi_n) &= e^{-\frac{1}{4\omega \tanh \omega \beta} \sum_i (\omega^2 \xi_i^2 + \sigma_i^2)} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times \\ &\times e^{-\frac{1}{2\omega \sinh \omega \beta} \sum_{i < j} \left\{ \cosh [\omega \beta (2|t_i - t_j| - 1)] (\omega^2 \xi_i \xi_j + \sigma_i \sigma_j) + i\omega \sinh [\omega \beta (2|t_i - t_j| - 1)] (\xi_i \sigma_j - \xi_j \sigma_i) \right\}}. \end{aligned}$$

La combinación de esta expresión con la ecuación (VI.2.8) da el resultado deseado para el desarrollo, exacto en el potencial armónico y perturbativo en V , de la traza del NDC del operador no local (VI.2.1).

⁶La función signo $\epsilon(\cdot)$ es ± 1 si su argumento es positivo (negativo).

6.3. FLM en el modelo de Grosse-Wulkenhaar

En la sección anterior hemos encontrado un desarrollo para la traza del NdC de un operador no local con un potencial armónico, el cual nos servirá para calcular a continuación la AE a un bucle en el modelo de GW. Con ese propósito principiamos uniendo las fórmulas (VI.1.5) y (VI.2.8); de este modo obtenemos la siguiente expresión para la AE a un bucle correspondiente a un campo escalar cuyo operador de fluctuaciones cuánticas posee un potencial armónico y uno arbitrario V_W :

$$(VI.3.1) \quad \Gamma_{1-\text{bucle}}[\phi] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \prod_{i=1}^n \left\{ d\tilde{\sigma}_i d\tilde{\xi}_i \tilde{V}_W(\sigma_i, \xi_i) \right\} \times \\ \times \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} d\beta \frac{e^{-\beta m^2} (-\beta)^{n-1}}{(2 \sinh \omega \beta)^d} K_{\beta}^{(n)},$$

donde las funciones $K_{\beta}^{(n)}$ que figuran en esta fórmula han sido plasmadas en (VI.2.16).

Sin más, la identificación del potencial V_W asociado al modelo de GW puede realizarse mediante la simple comparación de las ecuaciones para el operador de fluctuaciones y H , viz. (VI.1.4) y (VI.2.1):

$$(VI.3.2) \quad V_W(x, p) = \frac{\lambda}{3!} [\phi_{\star}^2(x - \Theta p) + \phi_{\star}^2(x + \Theta p) + \phi(x - \Theta p)\phi(x + \Theta p)] .$$

Como hemos mostrado en la sección 5.2, al escribir (VI.3.2) no es que nos hemos olvidado de realizar el ordenamiento de Weyl sino que nos sustentamos en el hecho de que cualquier operador escrito en la forma $f(x \pm i\Theta \partial)$, o como el producto $f(x + i\Theta \partial)g(x + i\Theta \partial)$ puede ser llevado a dicho orden sin la introducción de términos adicionales⁷. Por su parte, la transformada de Fourier $\tilde{V}_W(\cdot, \cdot)$ del potencial (VI.3.2) en sus dos variables es

$$(VI.3.3) \quad \tilde{V}_W(\sigma, \xi) = \frac{\lambda}{3!} (2\pi)^d [\delta(\xi - \Theta \sigma) \mathcal{F}\{\phi_{\star}^2\}(\sigma) + \delta(\xi + \Theta \sigma) \mathcal{F}\{\phi_{\star}^2\}(\sigma) + \\ + \det^{-1}(4\pi\Theta) \mathcal{F}\{\phi\}(\sigma/2 - \Theta^{-1}\xi/2) \mathcal{F}\{\phi\}(\sigma/2 + \Theta^{-1}\xi/2)] ,$$

al emplear el símbolo \mathcal{F} para representar la transformada de Fourier de una función en \mathbb{R}^d .

Previo a analizar cada término de la ecuación (VI.3.1) por separado para el campo escalar de GW, conviene mencionar algunos detalles a ella concernientes. Ante todo, deberemos mantener el parámetro Λ de

⁷Un resultado quizás poco intuitivo es que un operador escrito como $f(x + i\Theta \partial)g(x - i\Theta \partial)$ en general no corresponde al ordenamiento de Weyl.

corte UV para regularizar las divergencias de las integrales en el límite $\beta \rightarrow 0$. Segundo, hemos eliminado el término $n = 0$, en concordancia con una adaptación al presente caso de los argumentos que llevan a (II.2.6): en esta ocasión, el lugar del operador G es ocupado por $G_{GW} = -\partial^2 + m^2 + x^2$. Tercero, las divergencias IR de la AE que podrían aparecer en la integración (para $\beta \rightarrow \infty$), están ausentes incluso en el caso sin masa; el responsable de este comportamiento benévolo es el factor exponencialmente decreciente $(\sinh \omega \beta)^{-d}$ que tiene por su parte origen en el potencial de fondo armónico.

Por último, visto que el potencial V_W es cuadrático en los campos, el término indexado con n en la fórmula (VI.3.1) da la contribución de un bucle a la función de correlación de $2n$ puntos de la AE. En los sucesivos párrafos centraremos nuestra atención en los términos $n = 1$ y $n = 2$ para estudiar las correcciones a un bucle de las funciones de dos (propagador) y cuatro puntos, respectivamente⁸.

6.3.1. La función de dos puntos. Las contribuciones a la acción efectiva que son cuadráticas en el campo y, en consecuencia, corrigen el propagador, están dadas por el término $n = 1$ de (VI.3.1) (VI.3.4)

$$\Gamma^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{\sigma} d\tilde{\xi} \tilde{V}_W(\sigma, \xi) \int_{\Lambda^{-2}} d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{(2 \sinh \omega \beta)^d} K_\beta^{(1)}(\sigma; \xi),$$

donde, luego de realizar la integral respecto a t_1 , la expresión (VI.2.16) arroja el valor:

$$(VI.3.5) \quad K_\beta^{(1)}(\sigma; \xi) = e^{-\frac{1}{4\omega \tanh \omega \beta} (\omega^2 \xi^2 + \sigma^2)}.$$

Específicamente, la fórmula (VI.3.4) posee tres contribuciones, a saber una por cada término de la transformada \tilde{V}_W del potencial. El lector recordará de la sección 5.6 que dos de estos términos, aquellos que no mezclan la multiplicación Moyal a izquierda y a derecha, corresponden a contribuciones de diagramas de Feynman planares. El restante, aquel que mezcla el producto Moyal a izquierda y a derecha, es resultado de diagramas no planares. Analizaremos estos casos por separado.

6.3.1.1. Contribuciones planares. Como era de esperar, las dos contribuciones planares a la expresión (VI.3.4) coinciden. Esto resulta evidente del hecho de que difieran solamente en el signo del argumento de las funciones delta $\delta(\xi \pm \Theta \sigma)$, mientras que la función $K_\beta^{(1)}(\sigma, \xi)$ depende de ξ^2 .

⁸Dado que todos los resultados enunciados a continuación corresponden al orden de un bucle, omitiremos la inclusión del subíndice “1 – bucle” en lo que resta del capítulo.

Por consiguiente, la suma de estas dos correcciones planares $\Gamma_P^{(2)}[\phi]$ al término cuadrático de la acción efectiva puede ser escrita como

(VI.3.6)

$$\begin{aligned}\Gamma_P^{(2)}[\phi] &= \frac{\lambda}{6} \int_{\mathbb{R}^d} d\tilde{\sigma} \mathcal{F}\{\phi_\star^2\}(\sigma) \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{(2 \sinh \omega \beta)^d} e^{-\frac{1}{4\omega \tanh \omega \beta} (1+\omega^2 \theta^2) \sigma^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \Gamma_P^{(2)}(x) \star \phi(x) \star \phi(x),\end{aligned}$$

donde, debido al comportamiento del integrando para pequeños valores de β , hemos introducido la función $\Gamma_P^{(2)}(x)$ conservando la regularización mediante el parámetro de corte Λ :

(VI.3.7)

$$\Gamma_P^{(2)}(x) := \frac{\lambda}{3} \left\{ \frac{\omega}{2\pi(1+\omega^2 \theta^2)} \right\}^{d/2} \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{(\sinh 2\omega \beta)^{d/2}} e^{-\frac{\omega \tanh \omega \beta}{1+\omega^2 \theta^2} x^2}.$$

En el caso $\omega = 0$, que corresponde al modelo invariante frente a traslaciones, $\Gamma_P^{(2)}(x)$ resulta ser independiente de x y de θ , y su divergencia puede ser eliminada a través de la renormalización usual de la masa. En contraste, para $\omega \neq 0$ y dependiendo de la dimensión del ET, la regularización de esta divergencia podría precisar la redefinición de las constantes del término cinético, del término armónico e incluso de otras que acompañan potencias mayores de x .

A modo de ejemplo, consideremos las correcciones planares en un ET bidimensional. Reemplazando $d = 2$ en la fórmula (VI.3.7) obtenemos

$$(VI.3.8) \quad \Gamma_P^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} dx \{m_{2,\text{ren}}^2 \phi^2(x) + U_2(x) \star \phi(x) \star \phi(x)\}.$$

Al igual que en el caso conmutativo, la expresión (VI.3.8) posee una única divergencia logarítmica en términos de Λ , presente en el término de masa

$$(VI.3.9) \quad m_{2,\text{ren}}^2 := \frac{\lambda}{12\pi(1+\omega^2 \theta^2)} \log(\Lambda^2/\omega) + \text{términos finitos}.$$

El término remanente, correspondiente al potencial de fondo $U_2(x)$, es regular en el régimen UV y puede ser representado como

(VI.3.10)

$$U_2(x) := \frac{\lambda}{12\pi(1+\omega^2 \theta^2)} \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{m^2/2\omega} \left\{ e^{-\frac{\omega}{1+\omega^2 \theta^2} t x^2} - 1 \right\}.$$

Esta expresión se comporta como $\sim x^2$ para pequeños valores de x , de modo que renormaliza la frecuencia ω en una cantidad finita, cuyo valor

depende de la prescripción de renormalización a utilizar. En particular, para el caso sin masa se puede obtener la expresión cerrada definida a través de γ y $\Gamma(0, \cdot)$, la constante de Euler-Mascheroni y la función gamma incompleta respectivamente:

(VI.3.11)

$$U_2(x) \Big|_{m=0} = -\frac{\lambda}{12\pi(1+\omega^2\theta^2)} \left\{ \Gamma\left(0, \frac{\omega}{1+\omega^2\theta^2} x^2\right) + \log\left(\frac{\omega}{1+\omega^2\theta^2} x^2\right) + \gamma \right\}.$$

Como hemos adelantado, en dimensiones mayores, la AE precisa al menos de la renormalización de la masa, el campo y la frecuencia. Efectivamente, si tomamos $d = 4$, la expresión (VI.3.7) se reduce a

$$(VI.3.12) \quad \Gamma_P^{(2)}(x) = \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{\omega}{(1+\omega^2\theta^2)^2} \times \\ \times \int_{\tanh \frac{\omega}{\Lambda^2}}^1 \frac{dt}{t^2} \frac{(1-t)^{\frac{m^2}{2\omega}+1}}{(1+t)^{\frac{m^2}{2\omega}-1}} \left\{ 1 - \frac{\omega}{1+\omega^2\theta^2} t x^2 \right\} + O(x^4),$$

la cual diverge cuadráticamente para $\Lambda \rightarrow \infty$. Sin lugar a dudas, el término $O(x^4)$ es finito en el régimen UV y positivo, a la vez que el primero entre llaves es independiente de x y puede ser removido absorbiendo en la masa un término proporcional a Λ^2 . El segundo término entre llaves, en cambio, es proporcional a x^2 y resulta logarítmicamente divergente; más aún, reemplazado en la segunda línea de (VI.3.6) da lugar a la renormalización del campo y la frecuencia, ya que $\int dx \{x^2 \star \phi \star \phi\} = \int dx \{x^2 \phi^2 + \theta^2 (\partial\phi)^2\}$. La constante Z_4 de renormalización del campo a primer orden en las perturbaciones resulta

$$(VI.3.13) \quad Z_4 = 1 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1+\omega^2\theta^2)^3} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})],$$

donde $\phi_{\text{ren}}(x) := Z_4^{-1/2} \phi(x)$. Es importante remarcar que, en forma opuesta a lo que sucede en el caso conmutativo $\theta = 0$, la renormalización del campo ya posee contribuciones a este orden.

De igual manera, usando (VI.3.12) y teniendo en cuenta la renormalización de los campos, podemos escribir para la frecuencia ω_{ren} y la masa m_{ren} renormalizadas

(VI.3.14)

$$\omega_{\text{ren}}^2 = \omega^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{1 - \omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^3} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\},$$

(VI.3.15)

$$m_{\text{ren}}^2 = m^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{1}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} \Lambda^2 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^3} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\}.$$

Las cantidades renormalizadas (VI.3.13), (VI.3.14) y (VI.3.15) se encuentran en conformidad con las calculadas a un bucle por Grosse y Wulkenhaar (2004).

Es de remarcar el hecho de que para el punto autodual $\omega\theta = 1$, de acuerdo a la fórmula (VI.3.14), no es necesario absorber en la frecuencia ω términos que divergen para Λ grande; esto no sería posible de no ser por el valor preciso (VI.3.13) que toma la constante Z_4 de renormalización del campo y es consecuencia de la invariancia del modelo ante la dualidad de Langmann y R. J. Szabo (2002).

En pocas palabras, dicha dualidad corresponde a observar que, tanto a nivel clásico como cuántico, para $\theta\omega = 1$ la acción de GW tiene el mismo aspecto escrita en términos del campo o de su transformada de Fourier. Teniendo en cuenta que bajo esta transformación el término cinético se convierte en el término armónico y que la renormalización de la teoría puede realizarse por igual en el espacio de coordenadas o de momentos, es plausible el resultado $\omega_{\text{ren}} = \omega$ para el punto autodual. Ahondaremos sobre esta cuestión en la sección 6.3.2; llegado el momento precisaremos las expresiones de las funciones β para las diversas constantes:

$$\begin{aligned} \beta_{\omega^2} &= \Lambda \partial_\Lambda \omega^2 = \frac{\lambda \omega^2}{24\pi^2} \frac{1 - \omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^3} \\ \text{(VI.3.16)} \quad \beta_{m^2} &= \Lambda \partial_\Lambda m^2 = -\frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{\Lambda}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} - \frac{\lambda \omega^2}{24\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^3} \\ \gamma &= \Lambda \partial_\Lambda Z_4 = \frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^3}. \end{aligned}$$

Para completar la lista, hemos incluido también la función γ que indica el flujo de Z_4 , la renormalización del campo, con la escala de energía Λ .

6.3.1.2. Contribuciones no planares. La contribución no planar de un bucle a la AE, a saber, la correspondiente al tercer término de (VI.3.3), es

$$\text{(VI.3.17)} \quad \Gamma_{\text{NP}}^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{p} d\tilde{p}' \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(p') \Gamma_{\text{NP}}^{(2)}(p, p'),$$

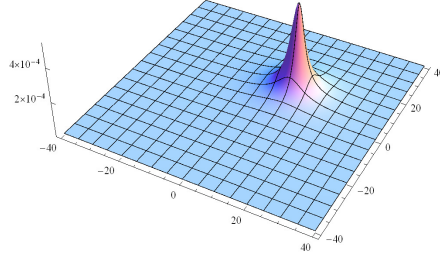


FIGURA 1. Potencial de fondo no local $U_{NP}(x, x')$ como función de $x \in \mathbb{R}^2$ para $x' = (10, 10) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1$ y $\omega = 0,1$ (la unidad de longitud es $\sqrt{\theta}$).

donde $\Gamma_{NP}^{(2)}(p, p')$ está definida en términos de la función hipergeométrica confluyente de Kummer $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ (Abramowitz y Stegun 1964):

(VI.3.18)

$$\begin{aligned} \Gamma_{NP}^{(2)}(p, p') &= \frac{\lambda}{6} \int_0^\infty \frac{d\beta}{(2 \sinh \omega \beta)^d} e^{-\beta m^2 - \frac{(p+p')^2 + \omega^2 \theta^2 (p-p')^2}{4\omega \tanh \omega \beta}} \\ &= \frac{\lambda}{12\omega} \Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{m^2}{2\omega}\right) e^{-\frac{1}{4\omega} \{(p+p')^2 + \omega^2 \theta^2 (p-p')^2\}} \times \\ &\quad \times U\left(\frac{d}{2} + \frac{m^2}{2\omega}, d; \frac{(p+p')^2 + \omega^2 \theta^2 (p-p')^2}{2\omega}\right). \end{aligned}$$

Como forma de verificar el cálculo, podemos tomar el límite $\omega \rightarrow 0^+$ de la expresión (VI.3.18). Este resultado, escrito en términos de la función modificada de Bessel $K_n(\cdot)$ de orden n (Abramowitz y Stegun 1964), es idéntico al ya expresado en la fórmula (V.6.5) y muestra que, para $\omega = 0$, la corrección no planar diverge para momentos entrantes pequeños⁹:

$$(VI.3.19) \quad \Gamma_{NP}^{(2)}(p, p') \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{3} \pi^{\frac{d}{2}} m^{\frac{d}{2}-1} \frac{K_{d/2-1}(2m\theta|p|)}{(\theta|p|)^{\frac{d}{2}-1}} \delta(p + p').$$

Retomando la ecuación (VI.3.18), conviene notar que hemos eliminado el parámetro de corte Λ , puesto que la integral es convergente en el régimen UV. Por este motivo e independientemente de la dimensión d del espacio, la contribución no planar representa una corrección no

⁹Recordemos que este efecto recibe el nombre de mezcla UV-IR (Minwalla et al. 2000).

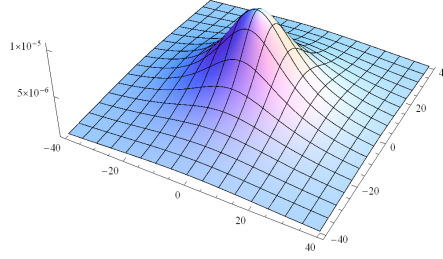


FIGURA 2. Potencial de fondo no local $U_{NP}(x, x')$ como función de $x \in \mathbb{R}^2$ para $x' = (10, 10) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1$ y $\omega = 1$ (la unidad de longitud es $\sqrt{\theta}$).

local finita, que puede escribirse como

$$(VI.3.20) \quad \Gamma_{NP}^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dx' \phi(x) \phi(x') U_{NP}(x, x'),$$

donde el potencial de fondo $U_{NP}(x, x')$ inducido por la autointeracción es, a orden \hbar ,

$$(VI.3.21) \quad U_{NP}(x, x') = \frac{\lambda}{6} \frac{1}{(4\pi\theta)^d} \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{(\cosh \omega\beta)^d} e^{-\frac{\tanh \omega\beta}{4\omega\theta^2} [(x-x')^2 + \omega^2\theta^2(x+x')^2]}.$$

Para el caso particular de un campo sin masa ($m = 0$) y en un ET bidimensional ($d = 2$), la expresión (VI.3.21) se puede escribir en forma cerrada como

$$(VI.3.22) \quad U_{NP}(x, x')|_{m=0, d=2} = \frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{4\omega\theta^2} [(x-x')^2 + \omega^2\theta^2(x+x')^2]}\right)}{[(x-x')^2 + \omega^2\theta^2(x+x')^2]}.$$

En las Figuras 1 y 2 mostramos los gráficos de $U_{NP}(x, x')$ como función de $x \in \mathbb{R}^2$ para dos valores diversos de $\omega\theta$. Observamos que el potencial de fondo muestra un pico agudo alrededor de $x = x'$ para pequeños valores de $\omega\theta$, mostrando una gran dependencia en la distancia $|x - x'|$ (ver Figura 1). Por el contrario, cerca del punto autodual $\omega\theta = 1$, el fondo depende únicamente de $|x|$ y $|x'|$ por separado, repeliendo el campo del origen (ver Figura 2). Por último, a medida que $\omega\theta$ se incrementa, la función U_{NP} se concentra cada vez más en la región alrededor de $x = -x'$.

6.3.2. La función de cuatro puntos. Luego de haber estudiado en el párrafo previo la renormalización del término cuadrático

de la AE, consideraremos a continuación la del término cuártico, que involucra la constante de acoplamiento λ . Con tal fin, examinemos la contribución de un bucle a la función de cuatro puntos $\Gamma^{(4)}$, indexada con $n = 2$ en la fórmula (VI.3.1):

$$(VI.3.23) \quad \Gamma^{(4)}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\sigma}_2 d\tilde{\xi}_1 d\tilde{\xi}_2 \tilde{V}_W(\sigma_1, \xi_1) \tilde{V}_W(\sigma_2, \xi_2) \times \\ \times \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta \beta \frac{e^{-\beta m^2}}{(2 \sinh \omega \beta)^d} K_\beta^{(2)}.$$

Las divergencias de la expresión (VI.3.23) en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ pueden aislarse considerando los primeros términos del desarrollo de $K_\beta^{(2)}$ para pequeños valores de β . Como veremos, para ET de dimensiones $d \leq 4$, bastará con tomar el término principal de la expansión para β pequeño de la fórmula (VI.2.16) para $n = 2$:

$$(VI.3.24) \quad K_\beta^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2; \xi_1, \xi_2) \sim e^{-\frac{1}{4\omega^2\beta} \{ \omega^2(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \}} \times \\ \times \int_{-1/2}^{1/2} dt \left(\frac{1}{2} - t \right) e^{-it(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)}.$$

Esta expresión nos permite realizar el siguiente razonamiento: debido a la presencia del prefactor exponencial, bajo su símbolo integral las variables $\xi_1, \sigma_1 \sim \sqrt{\beta}$; por ello, podemos reemplazar el desarrollo (VI.3.24) en (VI.3.23) aproximando la exponencial imaginaria a su valor en cero. Además, dado que los factores restantes dependen solo de las sumas $\xi_1 + \xi_2$ y $\sigma_1 + \sigma_2$, las integrales en (VI.3.23) dan como resultado la convolución de las transformadas de Fourier \tilde{V}_W . En definitiva, como funcional del potencial V_W la contribución cuártica toma la forma

$$(VI.3.25) \quad \Gamma^{(4)}[\phi] = -\frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dp V_W^2(x, p) \times \\ \times \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta \beta e^{-\beta m^2} \left(\frac{\omega \beta}{\sinh \omega \beta} \right)^d e^{-\beta \omega^2 x^2 - \beta p^2} + \dots,$$

donde los puntos indican contribuciones de orden superior en β .

Notemos que si la integral de $V_W^2(x, p)$ en el espacio de fases fuera finita, podríamos acotar las exponenciales $e^{-\beta \omega^2 x^2 - \beta p^2} \leq 1$ de la fórmula (VI.3.23) y mostrar que la contribución resulta finita en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$. Este es el caso de las correcciones no planares, para las cuales el factor $V_W^2(x, p)$ depende de ambas combinaciones independientes $(x \pm \Theta p)$.

A la inversa, el término planar $(\phi_\star^2(x - \Theta p))^2$ presente en $V_W^2(x, p)$, dependiente solo de $(x - \Theta p)$, no sería integrable si removiéramos los

factores exponenciales de la expresión (VI.3.25). En efecto, en esta ocasión la exponencial $e^{-\beta\omega^2x^2-\beta p^2}$ garantiza la convergencia en la dirección $(x + \Theta p)$, bajo el precio de agregar un factor $\beta^{-d/2}$; como resultado, para $d \geq 4$, la contribución se vuelve divergente UV. Por supuesto, un argumento similar vale para el término $(\phi_\star^2(x + \Theta p))^2$. A fin de cuentas, las contribuciones divergentes para la función de cuatro puntos pueden obtenerse del desarrollo

$$(VI.3.26) \quad \Gamma^{(4)}[\phi] = -\frac{\lambda^2}{72} \int_{\mathbb{R}^d} dx \frac{\{\phi_\star^2(x)\}^2}{(4\pi)^{d/2}} \times \\ \times \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta \beta^{1-\frac{d}{2}} \left(\frac{\omega\beta}{\sinh \omega\beta} \right)^d \frac{e^{-\beta(m^2 + \frac{\omega^2 x^2}{1+\omega^2\theta^2})}}{(1 + \omega^2\theta^2)^{d/2}} + \dots$$

En dos dimensiones, esta expresión es regular en el régimen UV y por lo tanto implica solo una renormalización finita de la constante de acoplamiento λ . En cambio, para $d \geq 4$, las contribuciones de un bucle a la función de cuatro puntos son divergentes.

En particular, para $d = 4$ la divergencia en (VI.3.26) proviene del único término escrito, visto que los puntos suspensivos indican contribuciones $O(\beta^0)$; reescribiéndola en la forma

$$(VI.3.27) \quad \Gamma^{(4)}[\phi] = -\frac{\lambda^2}{1152 \pi^2} \frac{1}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} \int_{\mathbb{R}^4} dx \phi_\star^4(x) \int_{\Lambda^{-2}}^{\omega^{-1}} \frac{d\beta}{\beta} + (\text{t. f.}),$$

observamos que puede ser removida introduciendo la constante de acoplamiento renormalizada, λ_R ; su cálculo, recordando la apropiada renormalización de los campos, es directo:

$$(VI.3.28) \quad \lambda_{\text{ren}} = Z_4^2 \lambda \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{1}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\}.$$

Ahora, haciendo uso de la ecuación (VI.3.28) y del desarrollo para Z_4 dado por la fórmula (VI.3.13), podemos calcular la correspondiente función β_λ para la constante de acoplamiento,

$$(VI.3.29) \quad \beta_\lambda := \Lambda \partial_\Lambda \lambda = \frac{\lambda^2}{24\pi^2} \frac{(1 - \theta^2\omega^2)}{(1 + \theta^2\omega^2)^3},$$

la cual se anula en el punto autodual $\omega\theta = 1$. El conjunto de las expresiones (VI.3.16) y (VI.3.29) implica que el flujo del grupo de renormalización tiene, al orden de un bucle, un punto fijo para $\omega\theta = 1$ y un valor finito de λ ; ello justifica la aseveración $\omega \sim \theta^{-1}$ y el hecho de que el potencial armónico deba ser tenido en cuenta no perturbativamente.

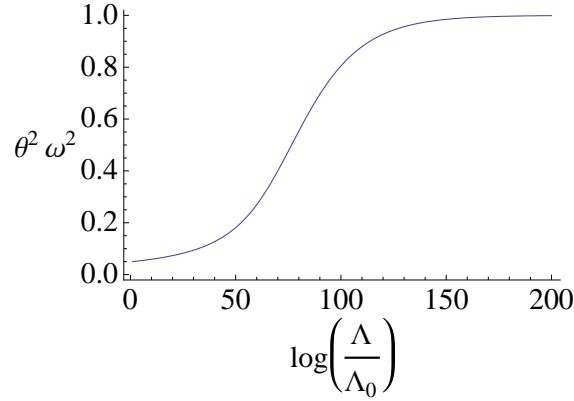


FIGURA 3. Solución numérica para $\theta\omega$, la frecuencia ω en unidades de θ^{-1} , como función de $\log\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)$, el logaritmo de la escala de energía Λ relativa a la escala inicial Λ_0 . Las condiciones iniciales impuestas son $\omega(\Lambda_0) = 0,05\theta^{-1}$ y $\lambda(\Lambda_0) = 1$.

No obstante la idea original de GW de obtener un modelo renormalizable tomando en cuenta la simetría de LS no intuía la presencia de un punto fijo, este resultado no es sorpresivo si tenemos en consideración las similitudes señaladas por Langmann, R. Szabo *et al.* (2004) entre teorías autoduales y cierto tipo de modelos matriciales. Notemos asimismo que de (VI.3.16) y (VI.3.29) se desprende la igualdad

$$(VI.3.30) \quad \frac{\beta_\lambda}{\lambda} = \frac{\beta_{\omega^2}}{\omega^2}$$

y, a su vez, de la integración de (VI.3.30) resulta inmediato que, al considerar el flujo de la escala de energía Λ , las constantes de acoplamiento λ y ω^2 se mantienen proporcionales entre sí.

Para exhibir cualitativamente el flujo de las constantes con la escala de energía, resolvemos numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales que plantean las funciones β , viz. (VI.3.16) y (VI.3.29). En las Figuras 3 y 4 incluimos los gráficos que obtenemos para $\theta\omega(\Lambda)$, la frecuencia ω en unidades de la inversa del parámetro de no conmutatividad θ , en función de $\log(\Lambda/\Lambda_0)$, el logaritmo de la escala de energía Λ relativa a la escala Λ_0 que utilizamos para imponer las condiciones iniciales $\omega(\Lambda_0) = \omega_0$ y $\lambda(\Lambda_0) = \lambda_0$.

En particular, las Figuras 3 y 4 corresponden a $\omega_0 < \theta^{-1}$ y $\omega_0 > \theta^{-1}$ respectivamente. De ellas se puede inferir que, efectivamente, sin importar su valor inicial la frecuencia tiende al valor límite $\omega(\infty) = \theta^{-1}$ para grandes escalas de energías. Recordemos que de acuerdo a (VI.3.30), el

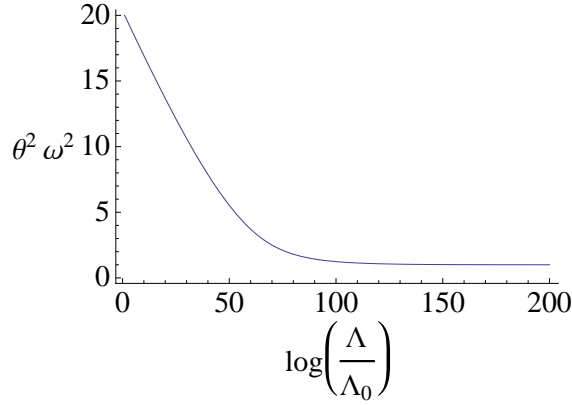


FIGURA 4. Solución numérica para $\theta\omega$, la frecuencia ω en unidades de θ^{-1} , como función de $\log\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right)$, el logaritmo de la escala de energía Λ relativa a la escala inicial Λ_0 . Las condiciones iniciales impuestas son $\omega(\Lambda_0) = 20\theta^{-1}$ y $\lambda(\Lambda_0) = 1$.

comportamiento de λ es proporcional a ω^2 y en consecuencia podemos presumir que el modelo de GW no presenta el problema del polo de Landau. En el anexo 6.C demostraremos esta aseveración al orden de un bucle, a la par que mostraremos que la elección de las condiciones iniciales sólo modifica la velocidad con la que los parámetros tienden a sus valores límites al tomar Λ grande.

Todos los cálculos hasta aquí desarrollados pertenecen al estudio de una matriz Θ de no conmutatividad no degenerada. Como veremos en la sección entrante, los resultados referentes a los parámetros de renormalización del modelo de GW se trasladan, al menos cualitativamente, al caso en que Θ es singular.

6.4. Análisis para una matriz de no conmutatividad degenerada

Para realizar el estudio del modelo de GW con una matriz Θ que posee subespacios conmutativos tenemos, entre varias, las siguientes dos opciones para utilizar las técnicas del FLM: la primera, que podría ser explorada siguiendo los lineamientos de la sección 6.5, consiste en tomar parámetros de no conmutatividad θ_μ diversos, de tal manera que al final del día podríamos imponer la conmutatividad en algunos planos tomando el límite θ_μ yendo a cero. La segunda, la elegida para desarrollar a continuación, plantea como punto de partida la existencia de los subespacios conmutativos.

Tomemos como ejemplo el ET euclídeo Moyal de cuatro dimensiones, parametrizado con coordenadas $(\bar{x}, x) \in \mathbb{R}^4$; cambiando ligeramente la notación de la sección 5.1, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ son coordenadas conmutantes y $x \in \mathbb{R}^2$ describe un espacio de dos dimensiones donde la no conmutatividad está caracterizada por la matriz

$$(VI.4.1) \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

En este espacio, tomemos un campo escalar $\varphi(\bar{x}, x)$ cuyo lagrangiano sea similar al de GW en las coordenadas no conmutativas,

$$(VI.4.2) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\bar{\partial}\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4;$$

hemos dividido el término cinético acordemente, llamando $\bar{\partial}$ y ∂ a los gradientes con respecto a \bar{x} y x . Por supuesto, el producto \star del término cuártico está definido como en la expresión (V.1.6), recordando que en este caso las variables involucradas son $x \in \mathbb{R}^2$ y la matriz Θ está dada por la ec. (VI.4.1): este producto \star no supone derivadas $\bar{\partial}$ con respecto a las variables conmutativas \bar{x} .

Buscando obtener las correcciones de un bucle a la AE de este modelo, prosigamos con el cálculo del operador de fluctuaciones cuánticas. De acuerdo a los pasos detallados en la sección 6.1, es evidente que este operador tendrá la forma

$$(VI.4.3) \quad H := -\bar{\partial}^2 - \partial^2 + m^2 + \omega^2 x^2 + V(\bar{x}, x, -i\partial).$$

Podemos por ende investigar la traza del NdC del operador general H; para obtener el resultado requerido, bastará reemplazar posteriormente V por un potencial que, salvo por la distinción entre coordenadas conmutantes y no conmutantes, es equivalente al dado en (VI.3.2).

Como primer paso, escribimos la representación usual para la traza del NdC del operador H:

$$(VI.4.4) \quad \text{Tr } e^{-\beta H} = e^{-\beta m^2} \mathcal{N}(\beta) \int_{\mathbb{R}^2} d\bar{x} \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \, e^{-S[\bar{q}, q, p]} e^{-\beta \int_0^1 dt V_W}.$$

Esta fórmula merece varias aclaraciones. Entre ellas, notemos que hemos realizado los reescaleos necesarios para que $V_W := V_W(\bar{x} + \sqrt{\beta} \bar{q}(t), \sqrt{\beta} q(t), p(t)/\sqrt{\beta})$. Igualmente, al escribirla hemos aprovechado que V_W no depende de $\bar{\partial}$ y hemos integrado el momento conjugado $\bar{p}(t)$: resta efectuar solo la integral en las trayectorias $\bar{q}(t)$ del espacio de configuración. Por su parte, estas trayectorias $\bar{q}(t)$ satisfacen condiciones de contorno Dirichlet $\bar{q}(0) = \bar{q}(1) = 0$, mientras que las trayectorias correspondientes

al plano no conmutante, $q(t)$ y $p(t)$, satisfacen condiciones de contorno periódicas. Esto explica la aparición de la integral sobre la variable \bar{x} para obtener la traza¹⁰. Finalmente, los términos en la acción de la partícula puntual que no dependen del potencial V admiten una separación $\mathcal{S}[\bar{q}, q, p] = \bar{\mathcal{S}}[\bar{q}] + \mathcal{S}[q, p]$, con

$$(VI.4.5) \quad \begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}[\bar{q}] &:= \frac{1}{4} \int_0^1 dt \, \dot{\bar{q}}^2(t), \\ \mathcal{S}[q, p] &:= \int_0^1 dt \, \{p(t)^2 - ip(t)\dot{q}(t) + \omega^2 \beta^2 q(t)^2\}. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos aseverar que será el término potencial V el que decidirá si se puede desacoplar el problema en uno conmutativo y otro NC.

En la forma habitual, la traza (VI.4.4) puede ser entendida como un valor de expectación cuya definición involucra la medida gaussiana dada por la IdC de las acciones (VI.4.5). El paso siguiente consiste en realizar un desarrollo en potencias de la transformada de Fourier \tilde{V}_W ; si como en los casos previos determinamos la normalización de manera que la expresión (VI.4.4) contemple el resultado conocido para $V_W = 0$, llegamos a la fórmula

$$(VI.4.6) \quad \begin{aligned} \text{Tr } e^{-\beta H} &= \frac{\pi}{4} \frac{e^{-\beta m^2}}{\beta \sinh^2 \omega \beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^6} d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\xi}_1 \dots \int_{\mathbb{R}^6} d\tilde{\sigma}_n d\tilde{\sigma}_n d\tilde{\xi}_n \times \\ &\times \delta(\bar{\sigma}_1 + \dots + \bar{\sigma}_n) \tilde{V}_W(\bar{\sigma}_1, \sigma_1, \xi_1) \dots \tilde{V}_W(\bar{\sigma}_n, \sigma_n, \xi_n) \times K_{\beta}^{(n)}. \end{aligned}$$

Estas funciones $K_{\beta}^{(n)}$ quedan completamente definidas por las FG para la partícula libre con condiciones de contorno Dirichlet ($Z_D[j]$) y con condiciones de contorno periódicas bajo la acción de un potencial armónico ($Z_{per}[k, j]$), escritas en (IV.2.10) y (VI.2.13) respectivamente:

$$(VI.4.7) \quad K_{\beta}^{(n)} := \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n Z_{per}[k_n, j_n] Z_D[\bar{j}_n];$$

¹⁰El uso de trayectorias periódicas $\bar{q}(t)$ no simplificaría el cálculo de la traza; ello se debe a la existencia de un modo cero para la acción de la partícula libre bajo éstas condiciones de contorno.

las fuentes que deben ser empleadas involucran las variables temporales intermedias t_i y las coordenadas de Fourier ξ_i , σ_i y $\bar{\sigma}_i$ en la forma

$$(VI.4.8) \quad \begin{aligned} k_n(t) &:= i \beta^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \xi_i, \\ j_n(t) &:= i \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \sigma_i, \\ \bar{j}_n(t) &:= \beta^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \bar{\sigma}_i. \end{aligned}$$

Conviene notar que hemos eliminado en (VI.4.6) el término dado por $n = 0$, ya que corresponde a la normalización de la FG de los campos¹¹. En tanto, la función delta con soporte en $\sum_i \bar{\sigma}_i$ es consecuencia de la integración hecha en \bar{x} . Adicionalmente, la descomposición (VI.4.5) se ve reflejada en la aparición del producto de funciones generatrices en (VI.4.7).

Retomando el hilo de la discusión, las contribuciones $\Gamma^{(2)}$ a la AE, cuadráticas en el campo, están indexadas por $n = 1$ en la ecuación (VI.4.6), debido a la estructura también cuadrática del potencial V_W :

$$(VI.4.9) \quad \Gamma^{(2)}[\phi] = \frac{1}{32\pi} \int_{\mathbb{R}^4} d\bar{\sigma} d\xi \tilde{V}_W(0, \sigma, \xi) \int_{\Lambda^{-2}} d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{\beta \sinh^2 \omega \beta} K_\beta^{(1)}.$$

En esta expresión hemos empleado la delta de Dirac para eliminar la integral en $\bar{\sigma}$, y, considerando (IV.2.10) y (VI.3.5), la función $K_\beta^{(1)}$ es sencillamente

$$(VI.4.10) \quad K_\beta^{(1)} = e^{-\frac{1}{4\omega \tanh \omega \beta} (\omega^2 \xi^2 + \sigma^2)}.$$

Para facilitar la exposición, nuevamente separaremos el estudio de los casos planares y no planares.

6.4.1. Contribuciones planares. Si consideramos los términos de \tilde{V}_W que no mezclan productos Moyal a izquierda y derecha, obtenemos la contribución planar a la función de dos puntos

$$(VI.4.11) \quad \Gamma_P^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d\bar{x} dx \Gamma_P^{(2)}(x) \star \phi(\bar{x}, x) \star \phi(\bar{x}, x),$$

efectuando la regularización de $\Gamma_P^{(2)}(x)$ por medio de un parámetro Λ de corte UV:

$$(VI.4.12) \quad \Gamma_P^{(2)}(x) = \frac{\lambda}{24\pi^2} \frac{\omega}{(1 + \omega^2 \theta^2)} \int_{\Lambda^{-2}} \frac{d\beta}{\beta} \frac{e^{-\beta m^2}}{\sinh 2\omega \beta} e^{-\frac{\omega \tanh \omega \beta}{1 + \omega^2 \theta^2} x^2}.$$

¹¹Cfr. (II.2.6) y los comentarios posteriores.

Este resultado es cualitativamente igual al obtenido para las contribuciones planares en el caso no degenerado, cfr. (VI.3.7). Desde el punto de vista de la renormalización, $\Gamma_P^{(2)}(x)$ posee una divergencia UV independiente de x y proporcional a Λ^2 que puede ser removida renormalizando la masa, y una divergencia logarítmica que se elimina redefiniendo la normalización de los campos y la frecuencia del término armónico.

En forma precisa, las correcciones de un bucle al término cinético ahora sólo introducen divergencias en las direcciones NC. Como consecuencia, para curarlas debemos introducir no sólo un parámetro de renormalización del campo Z , sino también uno nuevo a que tenga en cuenta esta asimetría entre direcciones conmutativas y no conmutativas (Grosse y Wohlgenannt 2012); en consecuencia el término cinético conmutativo del lagrangiano debería leerse $a(\partial\phi)^2$. La lista completa de parámetros involucrados en la renormalización de la función de dos puntos es

(VI.4.13)

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] , \\ a_{\text{ren}} &= a \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\} , \\ \omega_{\text{ren}}^2 &= \omega^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{1 - \omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\} , \\ m_{\text{ren}}^2 &= m^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{1}{(1 + \omega^2\theta^2)} \Lambda^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{48\pi^2} \frac{\omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^2} [\log(\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\} . \end{aligned}$$

Estos resultados, comparados con (VI.3.13) y (VI.3.14), muestran una potencia menor de $(1 + \omega^2\theta^2)$ en los términos divergentes; esta diferencia es entendible observando la dependencia con la dimensión en (VI.3.7).

6.4.2. Contribuciones no planares. La contribución no planar se calcula insertando en (VI.4.9) el término del potencial que mezcla productos Moyal a izquierda y a derecha; el resultado es

$$(VI.4.14) \quad \Gamma_{\text{NP}}^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^6} d\bar{x} dx dx' \phi(\bar{x}, x) \phi(\bar{x}, x') U_{\text{NP}}(x, x') ,$$

en términos del potencial de fondo $U_{\text{NP}}(x, x')$ que debe ser regularizado en el régimen UV,

(VI.4.15)

$$U_{\text{NP}}(x, x') = \frac{\lambda}{384\pi^3} \frac{1}{\theta^2} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\beta}{\beta} \frac{e^{-\beta m^2}}{\cosh^2 \omega \beta} e^{-\frac{\tanh \omega \beta}{4\omega \theta^2} [(x-x')^2 + \omega^2 \theta^2 (x+x')^2]}.$$

Las diferencias con el caso no degenerado son en esta oportunidad evidentes: mientras que cuando la matriz Θ es no degenerada, de acuerdo a (VI.3.19), las contribuciones no planares son finitas sin importar la dimensión de la variedad de base, tomando un subespacio degenerado de dimensión¹² 2 obtenemos una divergencia UV logarítmica

$$(VI.4.16) \quad U_{\text{NP}}(x, x') = \frac{\lambda}{384\pi^3} \frac{1}{\theta^2} \log \Lambda^2 / \omega + (\text{t. f.}).$$

Este tipo de divergencia no puede ser eliminada mediante la redefinición de los parámetros del lagrangiano (VI.4.2), dado que el mismo no posee un término con la forma de (VI.4.14). Para lograr la renormalización, se vuelve necesario introducir una nueva interacción no local al lagrangiano, en conformidad con lo descrito en el trabajo de Grosse y Vignes-Tourneret (2010):

$$(VI.4.17) \quad \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\theta^2} \int_{\mathbb{R}^6} d\bar{x} dx dx' \phi(\bar{x}, x) \phi(\bar{x}, x').$$

De este modo, la divergencia logarítmica encontrada en la fórmula (VI.4.16) se puede remover por vía de la renormalización del parámetro κ . Las funciones β que se obtienen sin dificultad a partir de (VI.4.13) y (VI.4.16) coinciden con los resultados de Grosse y Wohlgenannt (2012).

6.5. Anisotropía en el término harmónico

Finalizaremos este capítulo analizando qué sucede cuando el término harmónico del modelo de GW es anisótropo, a saber, cuando el lagrangiano toma la forma¹³

$$(VI.5.1) \quad \mathcal{L} = \sum_{\mu=1}^d \left[\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{\omega_{\mu}^2}{2} x_{\mu}^2 \phi^2 \right] + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_{\star}^4.$$

En adición, tomaremos una matriz de no conmutatividad Θ que en estas coordenadas se encuentra expresada en $d/2$ bloques de la forma (VI.4.1) con constantes θ_{μ} en principio diversas entre sí. Tomando en cuenta

¹²La divergencia de la contribución no planar se incrementa con el número de variables conmutativas, pues se ganan potencias $\beta^{-1/2}$ en perjuicio de factores $(\cosh^2 \omega \beta)^{-1}$ dentro del integrando de la expresión (VI.4.15).

¹³De aquí en adelante, escribiremos explícitamente todas las sumas sobre índices para evitar confusiones.

que el desarrollo de los cálculos involucrados en la obtención de las correcciones de un bucle a la AE es visiblemente semejante al realizado en las secciones previas, no nos detendremos en cálculos intermedios sino que mencionaremos los resultados más relevantes.

El operador de fluctuaciones de este modelo posee la forma de un operador H como el de la ecuación (VI.2.1); para este tipo de operadores, la anisotropía implica un pequeño cambio en la fórmula (VI.2.8), que ahora se lee

(VI.5.2)

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-\beta H} = & \frac{e^{-\beta m^2}}{\prod_{\mu=1}^d 2 \sinh \omega_{\mu} \beta} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{\sigma}_1 d\tilde{\xi}_1 \dots \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{\sigma}_n d\tilde{\xi}_n \times \\ & \times \tilde{V}_W(\sigma_1, \xi_1) \dots \tilde{V}_W(\sigma_n, \xi_n) \times K_{\beta}^{(n)}(\sigma_1, \dots; \xi_1, \dots). \end{aligned}$$

Como era de esperar, también las funciones $K_{\beta}^{(n)}$ deben modificarse en concordancia con el nuevo término armónico. Llamando ξ_i^{μ} a la μ -ésima componente de la coordenada ξ_i , la expresión (VI.2.16) se ve modificada según

(VI.5.3)

$$\begin{aligned} K_{\beta}^{(n)}(\sigma_1, \dots; \xi_1, \dots) = & e^{-\sum_{\mu=1}^d \frac{1}{4\omega_{\mu} \tanh \omega_{\mu} \beta} \sum_i (\omega_{\mu}^2 \xi_i^{\mu 2} + \sigma_i^{\mu 2})} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \times \\ & \times e^{-\sum_{\nu=1}^d \frac{1}{2\omega_{\nu} \sinh \omega_{\nu} \beta} \sum_{i < j} \left\{ \cosh [\omega_{\nu} \beta (2|t_i - t_j| - 1)] (\omega_{\nu}^2 \xi_i^{\nu} \xi_j^{\nu} + \sigma_i^{\nu} \sigma_j^{\nu}) \right\}} \times \\ & \times e^{-\sum_{\rho=1}^d \frac{1}{2 \sinh \omega_{\rho} \beta} \sum_{i < j} \left\{ i \sinh [\omega_{\rho} \beta (2|t_i - t_j| - 1)] (\xi_i^{\rho} \sigma_j^{\rho} - \xi_j^{\rho} \sigma_i^{\rho}) \right\}}. \end{aligned}$$

Para analizar como entra en juego la no conmutatividad en este nuevo modelo, tomemos por caso la contribución de un bucle a la función de 2 puntos,

$$\begin{aligned} \text{(VI.5.4)} \quad \Gamma^{(2)}[\phi] = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\tilde{\sigma} d\tilde{\xi} \tilde{V}_W(\sigma, \xi) \times \\ & \times \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} d\beta \left(\prod_{\mu=1}^d 2 \sinh \omega_{\mu} \beta \right)^{-1} e^{-\beta m^2} K_{\beta}^{(1)}(\sigma; \xi), \end{aligned}$$

donde, visto lo expresado en (VI.5.3), $K_\beta^{(1)}$ es una ligera variación de (VI.3.5):

$$(VI.5.5) \quad K_\beta^{(1)}(\sigma; \xi) = e^{-\sum_{\mu=1}^d \frac{1}{4\omega_\mu \tanh \omega_\mu \beta} (\omega_\mu^2 \xi_\mu^2 + \sigma_\mu^2)}.$$

Haciendo uso de estas ecuaciones, es posible mostrar que la contribución planar a la función de dos puntos puede aún ser escrita en la forma

$$(VI.5.6) \quad \Gamma_P^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \Gamma_P^{(2)}(x) \star \phi(x) \star \phi(x),$$

definiendo adecuadamente $\Gamma_P^{(2)}$; esta función posee una estructura de divergencias idéntica a la del caso analizado en la sección 6.3.1, lo cual es claro de la siguiente fórmula:

$$(VI.5.7) \quad \Gamma_P^{(2)}(x) := \frac{\lambda}{3} \left\{ \prod_{\mu=1}^d \frac{\omega_\mu}{2\pi(1 + \omega_\mu^2 \theta_\mu^2)} \right\}^{1/2} \times \\ \times \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\beta \left(\prod_{\nu=1}^d \sinh 2\omega_\nu \beta \right)^{-1/2} e^{-\beta m^2} e^{-\sum_{\rho=1}^d \frac{\omega_\rho \tanh \omega_\rho \beta}{1 + \omega_\rho^2 \theta_\rho^2} x_\rho^2}.$$

Por cierto, dichas contribuciones a la función de dos puntos tienen su contraparte no planar $\Gamma_{NP}^{(2)}$, proveniente siempre del término con productos Moyal cruzados en el potencial V_W :

$$(VI.5.8) \quad \Gamma_{NP}^{(2)}[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dx' \, \phi(x) \phi(x') \, U_{NP}(x, x').$$

El potencial de fondo $U_{NP}(x, x')$ es sin duda regular en el régimen UV, excluyendo los casos $\theta_\mu \neq 0$ y $\omega_\mu \neq 0$, visto que

$$(VI.5.9) \quad U_{NP}(x, x') = \frac{\lambda}{6} \frac{1}{(4\pi)^d \det \Theta} \int_0^\infty d\beta \left(\prod_{\mu=1}^d \cosh \omega_\mu \beta \right)^{-1} e^{-\beta m^2} \times \\ \times e^{-\sum_{\nu=1}^d \frac{\tanh \omega_\nu \beta}{4\omega_\nu \theta_\nu^2} [(x-x')_\nu^2 + \omega_\nu^2 \theta_\nu^2 (x+x')_\nu^2]}.$$

Cuando la matriz Θ es degenerada, i.e. cuando algún θ_μ se anula, hay que actuar con cierta cautela: el límite en cuestión da como resultado una delta de Dirac con soporte en $(x - x')_\mu$, e introduce un prefactor $(\tanh \omega_\mu \beta)^{-1/2}$ que puede afectar la convergencia de la integral para pequeños valores de β . Esto es lo que sucede, por ejemplo, en el caso

particular $d = 4$ al tomar un plano conmutativo: el resultado que se obtiene a partir de (VI.5.9) es idéntico al de (VI.4.15).

Tras haber analizado el caso degenerado en la sección 6.4, no resulta extraño que las componentes del término cinético deban ser renormalizadas independientemente y, consecuentemente, debamos escribir el lagrangiano renormalizado como

$$(VI.5.10) \quad \mathcal{L}_{\text{ren}} = \sum_{\mu=1}^4 \left[\frac{Z_{\mu}}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{\omega_{\mu, \text{ren}}^2}{2} x_{\mu}^2 \phi^2 \right] + \frac{m_{\text{ren}}^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_{\text{ren}}}{4!} \phi_{\star}^4.$$

Para ser precisos, si tomamos el ET euclídeo Moyal de dimensión $d = 4$, las constantes intervinientes en la renormalización se pueden escribir como

$$(VI.5.11) \quad \begin{aligned} Z_{\mu} &= 1 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\prod_{\nu=1}^4 (1 + \omega_{\nu}^2 \theta_{\nu}^2)^{-1/2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\omega_{\mu}^2 \theta_{\mu}^2}{(1 + \omega_{\mu}^2 \theta_{\mu}^2)} [\log (\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] , \\ \omega_{\mu, \text{ren}}^2 &= \omega_{\mu}^2 \left\{ 1 - \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\prod_{\nu=1}^4 (1 + \omega_{\nu}^2 \theta_{\nu}^2)^{-1/2} \right] (1 + \omega_{\mu}^2 \theta_{\mu}^2)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times [\log (\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right\} , \\ m_{\text{ren}}^2 &= m^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\prod_{\nu=1}^4 (1 + \omega_{\nu}^2 \theta_{\nu}^2)^{-1/2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\Lambda^2}{m^2} + \sum_{\rho} \frac{\omega_{\rho}^2 \theta_{\rho}^2}{(1 + \omega_{\rho}^2 \theta_{\rho}^2)^2} [\log (\Lambda^2/\omega) + (\text{t. f.})] \right] \right\} . \end{aligned}$$

A fin de cuentas, cabe destacar la importancia de la anisotropía en el potencial armónico de fondo como opción para eliminar las divergencias UV en un modelo no conmutativo caracterizado por d parámetros θ_{μ} diversos, con $\mu = 1, \dots, d$. Si eligiéramos $\omega_{\mu} = \Omega/\theta_{\mu}$, con Ω un nuevo parámetro adimensional, encontraríamos que bastaría la sola introducción de un parámetro Z para renormalizar el término cinético. A su vez, el cálculo de las funciones β mostraría que se anulan para el valor especial $\Omega = 1$. En otras palabras, la anisotropía del potencial armónico cancelaría la de los parámetros de no conmutatividad y, por consiguiente, las bondades del modelo no dependen de una elección particular de los parámetros de no conmutatividad.

Anexos

6.A. El núcleo de Mehler

El FLM puede ser utilizado para calcular no sólo la traza del NdC, sino también sus propiedades locales. En este anexo calcularemos, a modo de ejemplo, el propagador libre para el modelo de GW,

$$(VI.A.1) \quad \Delta(p, p') := \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dx' e^{-ipx - ip'x'} \langle x' | G^{-1} | x \rangle,$$

es decir la transformada de Fourier del núcleo del operador G^{-1} , cfr. (VI.1.3). Evidentemente, este propagador satisface la ecuación diferencial

$$(VI.A.2) \quad (-\omega^2 \partial^2 + m^2 + p^2) \Delta(p, p') = (2\pi)^d \delta(p + p').$$

Para comenzar el cálculo deseado, expresamos el operador G^{-1} en función del núcleo de calor $e^{-\beta G}$, obteniendo como resultado

$$(VI.A.3) \quad \Delta(p, p') = \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dx' e^{-ipx - ip'x'} \int_0^\infty d\beta \langle x' | e^{-\beta G} | x \rangle.$$

A continuación, introducimos la representación de dicho núcleo en términos de una IdC:

$$(VI.A.4) \quad \Delta(p, p') = \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dx' e^{-ipx - ip'x'} \times \\ \times \int_0^\infty d\beta e^{-\beta m^2} \int_{q(0)=x}^{q(\beta)=x'} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{-\int_0^\beta dt \{p^2(t) - ip(t)\dot{q}(t) + \omega^2 q^2(t)\}}.$$

Es preciso notar que en la IdC (VI.A.4) las trayectorias $p(t)$ no están sujetas a condición de contorno alguna, mientras que las trayectorias $q(t)$ satisfacen $q(0) = x$ y $q(\beta) = x'$. Como es frecuente, es conveniente introducir las perturbaciones alrededor de las soluciones clásicas $q_0(t), p_0(t)$, a saber, las trayectorias que minimizan la acción¹⁴

$$(VI.A.5) \quad \mathcal{S}_0[q(t), p(t)] = \int_0^\beta dt \{p^2(t) - ip(t)\dot{q}(t) + \omega^2 q^2(t)\}$$

¹⁴Notar que no usaremos los reescaleos en β de $p(t), q(t)$ y t que hemos utilizado frecuentemente.

con las condiciones de contorno recientemente mencionadas. Las soluciones a este problema son

$$(VI.A.6) \quad \begin{aligned} q_0(t) &= \frac{1}{\sinh 2\omega\beta} [x' \sinh 2\omega t + x \sinh 2\omega(\beta - t)] , \\ p_0(t) &= \frac{i\omega}{\sinh 2\omega\beta} [x' \cosh 2\omega t - x \cosh 2\omega(\beta - t)] ; \end{aligned}$$

estas nos permiten realizar las translaciones $q(t) \rightarrow q_0(t) + q(t)$ y $p(t) \rightarrow p_0(t) + p(t)$ en la expresión (VI.A.4) para obtener

$$(VI.A.7) \quad \begin{aligned} \Delta(p, p') &= \int_0^\infty d\beta e^{-\beta m^2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dx dx' e^{-ipx - ip'x'} e^{-\mathcal{S}_0[q_0(t), p_0(t)]} \times \\ &\times \int_{q(0)=0}^{q(\beta)=0} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{-ip_0 q|_0^\beta - \int_0^\beta dt \{p^2(t) - ip(t)\dot{q}(t) + \omega^2 q^2(t)\}} . \end{aligned}$$

De esta forma hemos logrado separar $\mathcal{S}_0[q_0(t), p_0(t)]$, la contribución clásica, del aporte de las fluctuaciones cuánticas, cifrado en la IdC en $q(t)$ y $p(t)$. Asimismo, luego del cambio de variables, la integral debe ser realizada sobre trayectorias que satisfacen las condiciones de contorno tipo Dirichlet $q(0) = q(\beta) = 0$.

Al utilizar el FLM es habitual interpretar las integrales de camino resultantes como amplitudes de transición; este caso no es la excepción. Pensando que corresponde a una transición entre puntos $x = x' = 0$ a tiempo euclídeo β para un oscilador armónico en d dimensiones, se pueden utilizar los polinomios de Hermite $H_n(\cdot)$, autofunciones del hamiltoniano del oscilador armónico, para calcular

$$(VI.A.8) \quad \begin{aligned} \int_{q(0)=0}^{q(\beta)=0} \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{-\int_0^\beta dt \{p^2(t) - ip(t)\dot{q}(t) + \omega^2 q^2(t)\}} &= \\ &= \langle x' = 0 | e^{-\beta \{-\partial^2 + \omega^2 x^2\}} | x = 0 \rangle \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\beta\omega(n+\frac{1}{2})} \frac{\sqrt{\omega}}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n^2(0) \right)^d \\ &= \left(\frac{\omega}{2\pi \sinh 2\omega\beta} \right)^{d/2} . \end{aligned}$$

Finalmente, uniendo los resultados (VI.A.7) y (VI.A.8) encontramos el núcleo de Mehler en el espacio de Fourier (Mehler 1866):

(VI.A.9)

$$\Delta(p, p') = \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^{d/2} \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-\beta m^2}}{(\sinh 2\omega\beta)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2\omega \sinh 2\omega\beta} \{ (p^2 + p'^2) \cosh 2\omega\beta + 2pp' \}}.$$

6.B. Sobre las condiciones de contorno en las integrales de camino para el modelo Grosse-Wulkenhaar

En la sección 6.2 hemos visto que es posible calcular la traza del NdC de operadores no locales de la forma

$$(VI.B.1) \quad H := -\partial^2 + m^2 + \omega^2 x^2 + V(x, -i\partial),$$

definidos sobre \mathbb{R}^d , implementando el FLM sobre trayectorias con condiciones de contorno periódicas. En este anexo mostraremos que idéntico resultado se obtiene, no obstante el cálculo sea más intrincado, considerando IdC con condiciones de contorno tipo Dirichlet.

Efectivamente, siguiendo los pasos que nos llevaron a obtener la ecuación (IV.1.5), es posible mostrar que el operador H puede ser interpretado, en mecánica cuántica y en el espacio de fases, como la suma de todas las transiciones de un punto a otro con la misma componente espacial, sin restricciones sobre la variable de momento que surge en la IdC¹⁵:

$$(VI.B.2) \quad \text{Tr}_{(D)} e^{-\beta H} =$$

$$= \beta^{d/2} \mathcal{N}(\beta) e^{-\beta m^2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{q(0)=x}^{q(1)=x} \mathcal{D}p \mathcal{D}q e^{-\mathcal{S}_0[q(t), p(t)] - \int_0^1 dt V_W(\sqrt{\beta} q, p/\sqrt{\beta})}.$$

En esta expresión hemos utilizado la escala $\sqrt{\beta}$ para trabajar con variables q y p sin dimensión, hemos introducido una normalización $\mathcal{N}(\beta)$ que luego será determinada a partir de un caso conocido y hemos separado el potencial V_W ordenado según la prescripción de Weyl de la acción clásica del oscilador armónico,

$$(VI.B.3) \quad \mathcal{S}_0[q(t), p(t)] := \int_0^1 dt \{ p^2 - i\dot{q}p + \beta^2 \omega^2 q^2 \}.$$

¹⁵Llamaremos a esta traza $\text{Tr}_{(D)}$ hasta tanto no demostremos su igualdad con la traza calculada utilizando trayectorias periódicas.

Por otro lado, a partir de este momento y sin pérdida de generalidad¹⁶, podemos considerar que el potencial corresponde sólo a un par de fuentes $j(t)$ y $k(t)$ en la forma

$$(VI.B.4) \quad V_W(\sqrt{\beta}q, p/\beta) = j(t)q(t) + k(t)p(t).$$

Como es usual al calcular IdC, simplificará los cálculos el considerar la trayectoria clásica $P_0^{(x)}$ en el espacio de fases, con componentes espacial $q_0^{(x)}$ y de momento $p_0^{(x)}$, que minimiza la acción \mathcal{S}_0 al partir desde un punto dado x del espacio de configuración y volver a él:

$$(VI.B.5) \quad \begin{aligned} P_0^{(x)}(t) &:= \begin{pmatrix} p_0^{(x)}(t) \\ q_0^{(x)}(t) \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \frac{i\omega\beta x}{\sinh 2\omega\beta} [\cosh 2\omega\beta t - \cosh 2\omega\beta(1-t)] \\ \frac{x}{\sinh 2\omega\beta} [\sinh 2\omega\beta t + \sinh 2\omega\beta(1-t)] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si asimismo definimos las fluctuaciones cuánticas Ψ de los caminos en el espacio de fase y el vector fuente $K(t)$ como

$$(VI.B.6) \quad \begin{aligned} P(t) &= P_0^{(x)}(t) + \Psi(t) \\ &= P_0^{(x)}(t) + \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} k(t) \\ j(t) \end{pmatrix},$$

la expresión para la traza se simplifica notablemente pues la acción del oscilador armónico se separa en un término de borde correspondiente a la trayectoria clásica y la acción armónica original (VI.B.3) para las

¹⁶Basta con hacer la transformada de Fourier de la exponencial del potencial para llegar a expresiones similares a aquella con la cual trabajaremos.

fluctuaciones cuánticas:

(VI.B.7)

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(D)} e^{-\beta H} &= \beta^{d/2} e^{-\beta m^2} \mathcal{N}(\beta) \int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-\omega\beta \tanh(\omega\beta)x^2 + \int_0^1 \beta^{1/2} K^t(t) P_0^{(x)}(t)} \\ &\quad \times \int_{\phi(0)=\phi(1)=0} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}_0[\phi(t), \psi(t)] + K^t(t) \Psi(t)}. \end{aligned}$$

De esta manera, hemos logrado separar el problema en el cálculo de dos integrales: una en la variable x y otra en los caminos $\phi(t)$ y $\psi(t)$ con condiciones de contorno Dirichlet. La primera no es más que una integral gaussiana cuyo resultado puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{(VI.B.8)} \quad &\int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-\omega\beta \tanh(\omega\beta)x^2 + \int_0^1 \beta^{1/2} K^t(t) P_0^{(x)}(t)} = \\ &= \left(\frac{\pi}{\omega\beta \tanh(\omega\beta)} \right)^{d/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dt dt' K^t(t) I(t, t') K^t(t') \right\}, \end{aligned}$$

donde, en términos del vector de trayectorias $P_0^{(1, \dots, 1)}(t)$ dado por la expresión (VI.B.5) con $x = (1, \dots, 1)$, el núcleo $I(t, t')$ es

$$\text{(VI.B.9)} \quad I(t, t') = \frac{1}{2\omega\beta \tanh(\omega\beta)} P_0^{(1, \dots, 1)}(t) \left(P_0^{(1, \dots, 1)} \right)^t(t').$$

La restante integral también es gaussiana y puede ser trabajada como en los demás casos estudiados a lo largo de este trabajo. Para ello, observemos que la acción \mathcal{S}_0 puede ser interpretada como el producto escalar

$$\text{(VI.B.10)} \quad \mathcal{S}_0[\phi, \psi] = -\frac{1}{2} \int_0^1 \Psi^t D_D \Psi,$$

en términos del operador hermítico D_D que actúa sobre trayectorias cuyas componentes espaciales satisfacen condiciones de contorno tipo Dirichlet,

$$\text{(VI.B.11)} \quad D_D = \begin{pmatrix} 2 & -i\partial_t \\ i\partial_t & 2\beta^2\omega^2 \end{pmatrix},$$

y cuyo inverso posee un núcleo de componentes $G_{ab}^{(D)}$ que pueden ser escritas como

(VI.B.12)

$$\begin{aligned} G_{pp}^{(D)}(t, t') &= \frac{\beta\omega}{2 \sinh(2\beta\omega)} [\cosh(2\beta\omega(t' + t - 1)) + \cosh(2\beta\omega(|t' - t| - 1))], \\ G_{px}^{(D)}(t, t') &= \frac{-i}{2 \sinh(2\beta\omega)} [\sinh(2\beta\omega(t' + t - 1)) - \epsilon(t' - t) \sinh(2\beta\omega(|t' - t| - 1))], \\ G_{xp}^{(D)}(t, t') &= \frac{-i}{2 \sinh(2\beta\omega)} [\sinh(2\beta\omega(t' + t - 1)) + \epsilon(t' - t) \sinh(2\beta\omega(|t' - t| - 1))], \\ G_{xx}^{(D)}(t, t') &= \frac{1}{2\beta\omega \sinh(2\beta\omega)} [\cosh(2\beta\omega(t' + t - 1)) - \cosh(2\beta\omega(|t' - t| - 1))]. \end{aligned}$$

Definamos también el valor medio $\langle f[q(t), p(t)] \rangle_D$ de una función $f(q, p)$ con una medida gaussiana dada por la IdC con la acción (VI.B.10),

(VI.B.13)

$$\langle f[q(t), p(t)] \rangle_D := \mathcal{Z}(\omega\beta)^{-1} \int_{\phi(0)=\phi(1)=0} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int_0^1 \Psi^t D_D \Psi} f[q(t), p(t)],$$

normalizada de forma tal que $\langle 1 \rangle_D = 1$ gracias a la presencia de la función $\mathcal{Z}(\omega\beta)$. Haciendo uso de estos resultados, obtenemos para la función generatriz $Z_D[k, j]$ la siguiente expresión que surge de completar cuadrados:

(VI.B.14)

$$\begin{aligned} Z_D[k(t), j(t)] &:= \left\langle e^{\int_0^1 K^t \Psi} \right\rangle_D \\ (VI.B.15) \quad &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dt dt' K^t(t) G^{(D)}(t, t') K(t') \right\}. \end{aligned}$$

Resta por determinar aún las funciones de normalización $\mathcal{N}(\beta)$ y $\mathcal{Z}(\omega\beta)$. Ello puede realizarse, tal y como hemos hecho en (VI.2.7), tomando el resultado conocido $m = V_W = 0$; en este caso llegamos a

(VI.B.16)

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(D)} e^{-\beta\{-\partial^2 + \omega^2 x^2\}} &= \beta^{d/2} \mathcal{N}(\beta) \mathcal{Z}(\omega\beta) \int dx e^{-\omega\beta \tanh(\omega\beta)x^2} \langle 1 \rangle_D \\ &= \frac{1}{(2 \sinh \omega\beta)^d}. \end{aligned}$$

Volviendo al cálculo de (VI.B.7), si reunimos los resultados (VI.B.8), (VI.B.14) y (VI.B.16), obtenemos finalmente la expresión cerrada

(VI.B.17)

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{(D)} e^{-\beta H} &= \left(\frac{\pi}{\omega \tanh(\omega\beta)} \right)^{d/2} e^{-\beta m^2} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dt dt' K^t(t) (G^{(D)}(t, t') + I(t, t')) K(t') \right\}. \end{aligned}$$

Esta expresión para la traza del NdC del operador H coincide con la que se obtiene de combinar (VI.2.5), (VI.2.6), (VI.2.7) y (VI.2.13) para el caso especial del potencial V_W dado por (VI.B.4),

(VI.B.18)

$$\begin{aligned} \text{Tr} e^{-\beta H} &= \left(\frac{\pi}{\omega \tanh(\omega\beta)} \right)^{d/2} e^{-\beta m^2} \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dt dt' K^t(t) G^{(per)}(t - t') K(t') \right\}, \end{aligned}$$

si tomamos en cuenta que a partir de la definición (VI.2.14) vale

$$(VI.B.19) \quad G^{(per)}(t - t') = G^{(D)}(t, t') + I(t, t').$$

6.C. El polo de Landau y el modelo de Grosse-Wulkenhaar al orden de un bucle

En este anexo nos dedicaremos a probar que, al orden de un bucle, el modelo de GW no presenta el conocido problema del polo de Landau. Para ello, mostraremos que la constante de acoplamiento λ , al igual que el cuadrado de la frecuencia ω^2 , se mantiene finita para cualquier valor del parámetro de corte Λ .

Para comenzar, podemos utilizar el resultado (VI.3.30) con el objetivo de reescribir la función β_{ω^2} , cfr. (VI.3.16), en términos de ω^2 y los valores λ_0 y ω_0^2 de la constante de acoplamiento y la frecuencia al cuadrado correspondientes a cierta escala Λ_0 :

$$(VI.C.1) \quad \beta_{\omega^2}(\Lambda, \omega^2) = \frac{\lambda_0}{24\pi^2\omega_0^2} \omega^4 \frac{1 - \omega^2\theta^2}{(1 + \omega^2\theta^2)^3}.$$

Visto que la función $\beta_{\omega^2}(t, x)$ es continua y acotada en todo el plano (t, x) , región donde también satisface la condición de Lipschitz en la variable x , el teorema de Picard-Lindelöf nos garantiza la existencia y la unicidad de la solución $\omega^2(\Lambda)$ a la ecuación diferencial (VI.C.1) para todo valor de Λ y condición inicial. Si bien encontrar una expresión cerrada para $\omega^2(\Lambda)$ no es sencillo, veremos que nos bastará obtener

funciones que la acoten por arriba y por debajo para lograr nuestro cometido.

Con el fin de simplificar la demostración, consideremos $\Lambda > \Lambda_0$ y $0 < \omega_0 \leq \theta^{-1}$ ya que el caso $\omega_0 \geq \theta^{-1}$ se puede analizar en forma similar. Puesto que $\omega^2(\Lambda)$ es continua, existirá un valor Λ_1 hasta el cual será cierto que $\omega(\Lambda) \leq \theta^{-1}$ y serán válidas las cotas

$$(VI.C.2) \quad a_m(1 - \omega^2\theta^2) \leq \beta_{\omega^2} \leq a_M(1 - \omega^2\theta^2),$$

donde hemos definido las constantes a_m y a_M a través de las fórmulas

$$(VI.C.3) \quad a_m := \frac{\lambda_0 \omega_0^2}{48\pi^2 (1 + \omega_0^2\theta^2)^2},$$

$$a_M := \frac{\lambda_0}{96\pi^2 \omega_0^2 \theta^4}.$$

El punto crucial es notar que las desigualdades impuestas por las expresiones (VI.C.2) pueden emplearse para construir otras en las que entre en juego explícitamente la función $\omega(\Lambda)$; efectivamente, es posible demostrar que en el intervalo $\Lambda_0 < \Lambda < \Lambda_1$ se cumple

$$(VI.C.4) \quad \omega_{min}^2(\Lambda) \leq \omega^2(\Lambda) \leq \omega_{max}^2(\Lambda),$$

llamando $\omega_{i=m,M}^2$ a las funciones cuyas ecuaciones diferenciales involucran las cotas superior e inferior escritas en (VI.C.4):

$$(VI.C.5) \quad \Lambda \partial_\Lambda \omega_i^2 = a_i(1 - \omega_i^2\theta^2), \quad \omega_i^2(\Lambda_0) = \omega_0^2, \quad i = m, M.$$

Por cierto, las soluciones a (VI.C.5) se pueden obtener sin dificultades y son funciones crecientes, acotadas superiormente por θ^{-2} :

$$(VI.C.6) \quad \omega_i^2(\Lambda) = \theta^{-2} + (\omega_0^2 - \theta^{-2}) \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^{-a_i\theta^2}, \quad i = m, M.$$

A dicho valor θ^{-2} tienden cuando Λ se vuelve grande, con una potencia dada por los valores de a_m y a_M , relacionados por su parte con los parámetros iniciales según (VI.C.3).

Ahora, observando (VI.C.4) debería ser claro que $\omega^2(\Lambda)$ no puede llegar a tomar el valor θ^{-2} , pues si lo tomara por primera vez para $\Lambda = \Lambda_2$ valdría $\omega_M(\Lambda_2) \geq \theta^{-2}$, lo cual se contradice con (VI.C.6). En definitiva, (VI.C.4) es válida para cualquier valor $\Lambda_0 < \Lambda < \infty$ y, por ende, la frecuencia ω resulta acotada superior e inferiormente por el valor límite

$$(VI.C.7) \quad \theta^{-2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \omega_{min}^2(\Lambda) \leq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \omega^2(\Lambda) \leq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \omega_{max}^2(\Lambda) = \theta^{-2}.$$

Recordando que según (VI.C.1) la constante de acoplamiento $\lambda(\Lambda)$ y la frecuencia al cuadrado $\omega^2(\Lambda)$ son proporcionales, λ debe ser una función acotada tal que

$$(VI.C.8) \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda(\Lambda) = \frac{\lambda_0}{\omega_0^2 \theta^2}.$$

Esto termina por demostrar que el modelo de GW no presenta un polo de Landau al orden de un bucle.

CAPÍTULO 7

Conclusiones

Ex parte enim cognoscimus, et ex parte prophetamus; cum autem venerit quod perfectum est, evacuabitur quod ex parte est... Videmus nunc per Speculum et in Aenigmate, tunc autem facie ad faciem. Nunc cognosco ex parte, tunc autem cognoscam sicut et cognitus sum.

– I Corinthios 13:12.

El problema de la gravedad cuántica ha estado presente en el mundo de la física fundamental desde la misma concepción de las teorías cuántica y de la gravedad, a juzgar por las palabras de Einstein en uno de sus trabajos fundadores de la teoría general de la gravedad¹. Si bien han sido reformuladas a lo largo de los años, las dos principales líneas de trabajo quedaron establecidas a mediados del siglo pasado (Rovelli 2004). En concreto, nos referimos a las que suelen mencionarse como línea de investigación covariante, en la cual se intenta construir una teoría cuántica de campos que considere las fluctuaciones de la métrica alrededor de una cierta métrica de fondo, y línea de investigación canónica, según la cual el espacio de Hilbert a considerar debe contener toda la métrica, sin necesidad de incurrir en la introducción de una métrica de fondo; claro está, en la actualidad corresponden a la teoría de cuerdas y la teoría de gravedad cuántica de bucles, respectivamente. Sin poner en tela de juicio la posible validez de estas teorías, no se puede negar ni la existencia de dificultades técnicas en los cálculos que involucran, ni que probablemente estas dificultades no sean resueltas por la actual generación de físicos.

La teoría cuántica de campos no conmutativa ofrece una solución de compromiso: existe una estrecha relación entre ella y el límite de

¹“Gleichwohl müßten die Atome zufolge der inneratomischen Elektronenbewegung nicht nur elektromagnetische, sondern auch Gravitationsenergie ausstrahlen, wenn auch in winzigem Betrage. Da dies in Wahrheit in der Natur nicht zutreffen dürfte, so scheint es, daß die Quantentheorie nicht nur die Maxwellsche Elektrodynamik, sondern auch die neue Gravitationstheorie wird modifizieren müssen”, (Einstein 1916).

bajas energías de la teoría de cuerdas, a la vez que ofrece posibilidades ciertas de cálculo. Su principal característica es la presencia de una longitud mínima, que surge del parámetro de no conmutatividad θ de los operadores posición en la teoría. Como si eso no bastara, no es impensado que en conjunto con las ideas de fenomenología surgidas a fines del siglo pasado en gravedad cuántica, ofrezcan en un futuro cercano posibles comparaciones entre predicciones teóricas y valores experimentales (Amelino-Camelia 2013).

En el escenario que hemos planteado, esta tesis ha propuesto una nueva herramienta de cálculo, la aplicación del Formalismo de Línea de Mundo a la TCC NC. Para ello, luego de haber ofrecido una breve reseña histórica en el primer capítulo, en el capítulo 2 hemos introducido las nociones generales de cálculos perturbativos a un bucle y renormalización en TCC con métodos funcionales, los cuales nos llevaron en forma natural a la consideración de técnicas espectrales.

Dichas técnicas espectrales encontraron su formulación matemática en el capítulo 3. El principal teorema de ese apartado establece la existencia de un desarrollo asintótico, en potencias del tiempo propio, del núcleo de calor para operadores en derivadas parciales que cumplan con las siguientes hipótesis:

- estar definido en un fibrado vectorial V suave, sobre \mathcal{M} , una variedad Riemanniana d -dimensional, suave, compacta y sin borde;
- ser de orden $g > 0$, elíptico y autoadjunto;
- y poseer un símbolo principal definido positivo para las variables duales $\xi \neq 0$.

En ese caso, para el NdC $K(t, x, y)$, vale el desarrollo asintótico de su diagonal

$$(VII.0.9) \quad K(t, x, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{n-d}{k}} e_n(x, P), \quad \text{para } t \downarrow 0,$$

donde los coeficientes locales e invariantes $e_n(x, P)$ dependen de un número finito de lo que en física llamaríamos términos de potencial, de la conexión A_μ y de la métrica, y se anulan para n impar. El caso de variedades con borde es análogo, salvo por el hecho que en general los e_n con n impar dejan de ser nulos.

Partiendo de esa base, nos hemos dedicado en el transcurso del capítulo 4 a desarrollar el FLM para la TCC usual. El FLM supone la utilización de IdC en mecánica cuántica para el cómputo de trazas de NdC, y resulta aplicable al estudio de correcciones cuánticas en TCC.

La eficiencia de este método quedó plasmada al analizar modelos escalares con potenciales regulares arbitrarios. Para el caso $\lambda\phi^4$ hemos discutido su renormalización al orden de un bucle, en la cual surgen dos caras del mismo problema: el polo de Landau y la trivialidad cuántica, según los cuales el modelo degenera en $\lambda \rightarrow \infty$ o $\lambda = 0$ respectivamente. Este problema dejó perpleja a la comunidad física hasta el descubrimiento de la libertad asintótica en el marco de las teorías de gauge no abelianas.

Además, hemos considerado el caso de operadores con potenciales singulares tipo delta de Dirac, los cuales generan condiciones de pegado que suelen ser interpretados en la literatura como condiciones de borde semitransparentes. Esta interpretación permite aseverar que, por más que este tipo de potenciales no sean suaves, los resultados están en concordancia con las conclusiones del teorema resumido en (VII.0.9); en efecto, es de destacar que el desarrollo del NdC posee potencias semienteras del tiempo propio. Una aplicación de estas condiciones de contorno es el estudio de densidades de carga eléctrica confinadas a capas muy delgadas, por ejemplo, en moléculas gigantes de carbono; vista la relevancia que adquiere la fuerza de Casimir a escalas nanométricas, hoy en día al alcance de la mano, hemos creído apropiada la determinación de su valor para este problema de condiciones de contorno semitransparentes. El resultado muestra que las fuerzas involucradas para esta geometría son atractivas.

El capítulo 5 ha cumplido con el objetivo de implementar el FLM a las TCC NC definidas sobre el ET euclídeo Moyal. Teniendo en cuenta que la NC pone en pie de igualdad coordenadas y momentos, decidimos encarar el problema en el espacio de fases; en este espacio calculamos la FG y el desarrollo de la traza del NdC de operadores no locales. Estos resultados, más allá de su aplicación física, son de por sí importantes en el estudio formal de las FE. Un punto crucial fue el reconocimiento de términos no locales en el desarrollo del NdC, los cuales en el estudio de dos modelos, uno sobre el toro NC y otro el de un potencial $\lambda\varphi_\star^4$, sugirieron la no renormalizabilidad de los mismos. Un efecto relacionado es la mezcla UV-IR, que justamente vincula las divergencias de los regímenes UV e IR. Otros efectos propios de TCC NC son estudiados en el modelo del disco NC.

Por último, a lo largo del capítulo 6, hemos modificado el FLM para emplearlo en el estudio del campo escalar de GW, cuyo lagrangiano es:

$$(VII.0.10) \quad \mathcal{L}_{GW} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_\star^4.$$

El término armónico debe ser tratado exactamente, debido al gran valor que *a posteriori* vimos que toma su constante de acoplamiento, mientras que el potencial $\lambda\phi_\star^4$ puede ser tratado perturbativamente. Fruto del análisis de la renormalizabilidad al orden de un bucle, obtuvimos constantes renormalizadas que coinciden con Disertori, Gurau *et al.* (2007) y muestran la existencia de un punto fijo en el flujo del grupo de renormalización para el valor $\omega\theta = 1$. De esta manera, la constante de acoplamiento se mantiene acotada sin necesidad de introducir la libertad asintótica. También investigamos dos variaciones del modelo de GW, en las cuales la matriz de no conmutatividad es singular o el potencial armónico de fondo es anisotrópico. Demostramos para ambos que la estructura de divergencias es similar a la del modelo original, con algunas nuevas complicaciones. Conviene mencionar que para ninguno de estos dos casos ha sido probada la renormalizabilidad a todo orden en teorías de perturbaciones.

7.1. Trabajo a futuro

Para concluir esta tesis, proponemos algunas líneas de investigación que serían una continuación lógica de los resultados hasta aquí obtenidos.

Una primera opción consiste en implementar el FLM para obtener cantidades a ordenes superiores en el número de bucles. En la obra de Sato (1999), Sato y Schmidt (1999) y Schubert (1996, 2001), el cálculo de diagramas de múltiples bucles es realizado para campos escalares, espinores y de gauge en TCC usual. La ventaja que en este caso ofrece el FLM surge de la ausencia de variables de momento virtuales que oscurezcan la distinción de los términos involucrados en la acción efectiva.

Por otro lado, la aplicación del FLM al estudio de variedades chatas con borde es de reciente data (Bastianelli *et al.* 2009, Bastianelli, Corradini y P. A. G. Pisani 2007, 2008, Bastianelli *et al.* 2008). El estudio de modelos con bordes resulta de por sí interesante en el contexto de TCC NC, en cuanto como punto de partida debe definirse qué se entiende por borde en una geometría donde es imposible localizar puntos. En esta dirección, hemos analizado el disco NC (Falomir, Franchino Viñas *et al.* 2013) y actualmente estamos investigando dos problemas concretos:

- el problema de Casimir de dos placas paralelas sobre las que el campo satisface condiciones Dirichlet, en un ET euclídeo Moyal de 2+1 dimensiones;
- la termodinámica de partículas bosónicas y fermiónicas en el problema ya estudiado del disco NC.

La aplicación del FLM a este tipo de problemas con borde sería un objetivo por alcanzar.

Tercero y último, un problema interesante a analizar es el de las teorías de gauge NC, las cuales podrían dar paso a la generalización NC del modelo estándar. Los desafíos que surgen en este caso son varios. Por una parte, el tipo y el número de álgebras que puede ser utilizado para la construcción de estos modelos no abelianos queda restringido (Chaichian, Presnajder *et al.* 2002, Matsubara 2000). Por otro lado, tal y como sucede en el modelo escalar, la no localidad implica la presencia del efecto de mezcla UV-IR (Bichl *et al.* 2004, Grosse, Krajewski *et al.* 2000, Matusis *et al.* 2000). Las divergencias IR originadas por este efecto provienen de términos que no están presentes en el lagrangiano original y son de naturaleza diversa a las encontradas por la inclusión de mediadores no masivos en las teorías de gauge conmutativas.

Luego del éxito del modelo escalar de GW, sus técnicas se han propuesto en varios modelos de campos de gauge con el fin de eliminar las divergencias IR (Blaschke, Gieres *et al.* 2008, Blaschke, Grosse, Kronberger *et al.* 2010, Blaschke, Grosse y Wallet 2013, Goursac *et al.* 2007, Grosse y Wohlgenannt 2007). Sin embargo, la inclusión de un término “armónico” aún no ha dado sus frutos en este tipo de teorías. Uno de los principales escollos que surge a la hora de incluir este tipo de términos es la preservación de la simetría de gauge; ésta resulta ser asimismo un obstáculo al intentar demostrar la renormalización de estos modelos mediante las técnicas usadas para el campo de GW. La implementación del enfoque de BPHZ (Blaschke 2014) podría ser una salida elegante de esta encrucijada. También se ha evaluado la posibilidad de que la regularización de la mezcla UV-IR provenga de la interacción con la curvatura del espacio sobre el cual el campo está definido (Buric, Grosse *et al.* 2010, Goursac 2010). Asimismo, consideramos que las ventajas técnicas del FLM pueden ser de ayuda en el estudio perturbativo de los modelos actualmente en desarrollo.

Agradecimientos

Bibliografía

- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Fifth edition. New York: Dover (vid. págs. [31](#), [35](#), [40](#), [93](#), [100](#), [115](#)).
- Affleck, I. K., Alvarez, O. y Manton, N. S. (1982). “Pair Production at Strong Coupling in Weak External Fields”. *Nucl.Phys.* B197, pág. 509 (vid. pág. [19](#)).
- Ahluwalia, D. V. (1994). “Quantum measurements, gravitation, and locality”. *Phys.Lett.* B339, págs. 301-303. arXiv: [gr-qc/9308007](#) [[gr-qc](#)] (vid. pág. [15](#)).
- Ahmadinia, N., Schubert, C. y Villanueva, V. M. (2013). “String-inspired representations of photon/gluon amplitudes”. *JHEP* 1301, pág. 132. arXiv: [1211.1821](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [19](#)).
- Aizenman, M. (1981). “Proof of the Triviality of ϕ_d^4 Field Theory and Some Mean-Field Features of Ising Models for $d > 4$ ”. *Phys. Rev. Lett.* 47 (1), págs. 1-4 (vid. pág. [17](#)).
- Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R. y Holden, H. (1988). *Solvable models in quantum mechanics*. Texts and Monographs in Physics. New York: Springer-Verlag (vid. pág. [64](#)).
- Alvarez-Gaume, L. y Witten, E. (1984). “Gravitational Anomalies”. *Nucl.Phys.* B234, pág. 269 (vid. pág. [19](#)).
- Amelino-Camelia, G. (2013). “Quantum-Spacetime Phenomenology”. *Living Rev. Rel.* 16, pág. 5. arXiv: [0806.0339](#) [[gr-qc](#)] (vid. págs. [18](#), [140](#)).
- Aoyama, T., Hayakawa, M., Kinoshita, T. y Nio, M. (2015). “Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment — Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops”. *Phys. Rev.* D91.3, pág. 033006. arXiv: [1412.8284](#) [[hep-ph](#)] (vid. pág. [12](#)).
- Ashtekar, A. (1993). “Quantum gravity: A Mathematical physics perspective”. arXiv: [hep-th/9404019](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [15](#)).
- Barton, G. (2004). “Casimir energies of spherical plasma shells”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37.3, pág. 1011 (vid. pág. [69](#)).
- (2005a). “Casimir effects for a flat plasma sheet: I. Energies”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.13, pág. 2997 (vid. pág. [69](#)).
- Barton, G. (2005b). “Casimir effects for a flat plasma sheet: II. Fields and stresses”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.13, pág. 3021 (vid. pág. [69](#)).
- Bastianelli, F., Corradini, O., Pisani, P. A. G. y Schubert, C. (2009). “Worldline Approach to QFT on Manifolds with Boundary”. arXiv: [0912.4120](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. [19](#), [64](#), [142](#)).
- Bastianelli, F. y van Nieuwenhuizen, P. (2006). “Path integrals and anomalies in curved space” (vid. págs. [18](#), [24](#), [53](#), [80](#), [81](#)).
- Bastianelli, F., Benincasa, P. y Giombi, S. (2005). “Worldline approach to vector and antisymmetric tensor fields”. *JHEP* 0504, pág. 010. arXiv: [hep-th/0503155](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [19](#)).

- Bastianelli, F., Corradini, O. y Latini, E. (2007). “Higher spin fields from a worldline perspective”. *JHEP* 0702, pág. 072. arXiv: [hep-th/0701055 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 19).
- (2008). “Spinning particles and higher spin fields on (A)dS backgrounds”. *JHEP* 0811, pág. 054. arXiv: [0810.0188 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 19).
- Bastianelli, F., Corradini, O. y Pisani, P. A. G. (2007). “Worldline approach to quantum field theories on flat manifolds with boundaries”. *JHEP* 0702, pág. 059. arXiv: [hep-th/0612236 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 19, 64, 142).
- (2008). “Scalar field with Robin boundary conditions in the worldline formalism”. *J. Phys.* A41, pág. 164010. arXiv: [0710.4026 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 19, 64, 142).
- Bastianelli, F., Corradini, O., Pisani, P. A. G. y Schubert, C. (2008). “Scalar heat kernel with boundary in the worldline formalism”. *JHEP* 0810, pág. 095. arXiv: [0809.0652 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 19, 64, 142).
- Bastianelli, F., Corradini, O. y Zirotti, A. (2003). “Dimensional regularization for $N=1$ supersymmetric sigma models and the worldline formalism”. *Phys. Rev.* D67, pág. 104009. arXiv: [hep-th/0211134 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 19).
- Bastianelli, F. y Nieuwenhuizen, P. van (1993). “Trace anomalies from quantum mechanics”. *Nucl.Phys.* B389, págs. 53-80. arXiv: [hep-th/9208059 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 55).
- Bastianelli, F. y Schubert, C. (2005). “One loop photon-graviton mixing in an electromagnetic field: Part 1”. *JHEP* 0502, pág. 069. arXiv: [gr-qc/0412095 \[gr-qc\]](#) (vid. pág. 19).
- Bastianelli, F. y Zirotti, A. (2002). “Worldline formalism in a gravitational background”. *Nuclear Physics B* 642, págs. 372-388 (vid. pág. 19).
- Bellucci, S. y Saharian, A. A. (2009). “Fermionic Casimir effect for parallel plates in the presence of compact dimensions with applications to nanotubes”. *Phys. Rev.* D80, pág. 105003. arXiv: [0907.4942 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 33).
- Bern, Z. y Kosower, D. A. (1988). “A New Approach to One Loop Calculations in Gauge Theories”. *Phys.Rev.* D38, pág. 1888 (vid. pág. 19).
- (1992). “The Computation of loop amplitudes in gauge theories”. *Nucl.Phys.* B379, págs. 451-561 (vid. pág. 19).
- Bertotti, B., Iess, L. y Tortora, P. (2003). “A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft”. *Nature* 425, pág. 374 (vid. pág. 12).
- Bichl, A. A. et al. (2004). “Noncommutative $U(1)$ superYang-Mills theory: Perturbative selfenergy corrections”. *Int. J. Mod. Phys.* A19, págs. 4231-4250. arXiv: [hep-th/0203141 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 143).
- Birrell, N. D. y Davies, P. C. W. (1982). “Quantum Fields in Curved Space”. *Cambridge Monogr. Math. Phys.* (Vid. pág. 34).
- Blaschke, D. N. (2014). “Gauge Fields on Non-Commutative Spaces and Renormalization”. *Fortsch. Phys.* 62, págs. 820-824. arXiv: [1402.5980 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 143).
- Blaschke, D. N., Gieres, F. et al. (2008). “Translation-invariant models for non-commutative gauge fields”. *J. Phys.* A41, pág. 252002. arXiv: [0804.1914 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 143).
- Blaschke, D. N., Grosse, H., Kronberger, E. et al. (2010). “Loop Calculations for the Non-Commutative $U^*(1)$ Gauge Field Model with Oscillator Term”. *Eur. Phys. J.* C67, págs. 575-582. arXiv: [0912.3642 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 143).

- Blaschke, D. N., Grosse, H. y Wallet, J.-C. (2013). “Slavnov-Taylor identities, non-commutative gauge theories and infrared divergences”. *JHEP* 1306, pág. 038. arXiv: [1302.2903](#) (vid. pág. [143](#)).
- Blau, S., Visser, M. y Wipf, A. (1988). “Zeta Functions and the Casimir Energy”. *Nucl. Phys.* B310, pág. 163. arXiv: [0906.2817](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. [36](#), [37](#)).
- Bonezzi, R., Corradini, O., Franchino Viñas, S. A. y Pisani, P. A. G. (2012). “World-line approach to noncommutative field theory”. *J. Phys.* A45, pág. 405401. arXiv: [1204.1013](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [21](#)).
- Bordag, M. y Khusnutdinov, N. (2008). “On the vacuum energy of a spherical plasma shell”. *Phys. Rev.* D77, pág. 085026. arXiv: [0801.2062](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [69](#)).
- Bordag, M. (2006). “The Casimir effect for thin plasma sheets and the role of the surface plasmons”. *J. Phys.* A39, págs. 6173-6186. arXiv: [hep-th/0511269](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. [64](#), [69](#), [72](#)).
- (2007a). “Generalized Lifshitz formula for a cylindrical plasma sheet in front of a plane beyond proximity force approximation”. *Phys. Rev.* D75, pág. 065003. arXiv: [quant-ph/0611243](#) [[quant-ph](#)] (vid. pág. [69](#)).
- (2007b). “Interaction of a charge with a thin plasma sheet”. *Phys. Rev.* D76, pág. 065011 (vid. pág. [69](#)).
- (2009). “Ultraviolet divergences, repulsive forces and a spherical plasma shell”. *J. Phys. Conf. Ser.* 161, pág. 012018 (vid. pág. [69](#)).
- Bordag, M., Elizalde, E., Kirsten, K. y Leseduarte, S. (1997). “Casimir energies for massive fields in the bag”. *Phys. Rev.* D56, págs. 4896-4904. arXiv: [hep-th/9608071](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [33](#)).
- Bordag, M., Hennig, D. y Robaschik, D. (1992). “Vacuum energy in quantum field theory with external potentials concentrated on planes”. *J. Phys.* A25, págs. 4483-4498 (vid. pág. [69](#)).
- Bordag, M., Mohideen, U. y Mostepanenko, V. M. (2001). “New developments in the Casimir effect”. *Phys. Rept.* 353, págs. 1-205. arXiv: [quant-ph/0106045](#) [[quant-ph](#)] (vid. pág. [33](#)).
- Bordag, M., Pirozhenko, I. G. y Nesterenko, V. V. (2005). “Spectral analysis of a flat plasma sheet model”. *J. Phys.* A38, pág. 11027. arXiv: [hep-th/0508198](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [69](#)).
- Bordag, M. y Vassilevich, D. V. (1999). “Heat kernel expansion for semitransparent boundaries”. *J. Phys.* A32, págs. 8247-8259. arXiv: [hep-th/9907076](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [68](#)).
- Buric, M., Grosse, H. y Madore, J. (2010). “Gauge fields on noncommutative geometries with curvature”. *JHEP* 1007, pág. 010. arXiv: [1003.2284](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [143](#)).
- Buric, M. y Wohlgenannt, M. (2010). “Geometry of the Grosse-Wulkenhaar Model”. *JHEP* 1003, pág. 053. arXiv: [0902.3408](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. [103](#)).
- Carleman, T. (1934). “Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes”. *Forhand. 8th Skand. Mat. Kongress*, pág. 34 (vid. pág. [44](#)).
- Casimir, H. B. G. (1948). “On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates”. *Indag. Math.* 10, págs. 261-263 (vid. pág. [33](#)).

- Chaichian, M., Demichev, A., Presnajder, P. y Tureanu, A. (2001). “Space-time noncommutativity, discreteness of time and unitarity”. *Eur. Phys. J. C* 20, págs. 767-772. arXiv: [hep-th/0007156](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 95).
- Chaichian, M., Presnajder, P., Sheikh-Jabbari, M. M. y Tureanu, A. (2002). “Noncommutative gauge field theories: A No go theorem”. *Phys. Lett. B* 526, págs. 132-136. arXiv: [hep-th/0107037](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 143).
- Chamseddine, A. H. y Connes, A. (1997). “The Spectral action principle”. *Commun. Math. Phys.* 186, págs. 731-750. arXiv: [hep-th/9606001](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 14).
- Chang, C. C. et al. (2012). “Gradient of the Casimir force between Au surfaces of a sphere and a plate measured using an atomic force microscope in a frequency-shift technique”. *Phys. Rev. B* 85, pág. 165443 (vid. pág. 33).
- Coleman, D. (1988). *Aspects of Symmetry*. New York: Cambridge University Press (vid. pág. 37).
- Connes, A. (1994). “Noncommutative geometry” (vid. págs. 14, 75).
- (2006). “Noncommutative geometry and the standard model with neutrino mixing”. *JHEP* 0611, pág. 081. arXiv: [hep-th/0608226](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 14).
- Connes, A. y Lott, J. (1991). “Particle Models and Noncommutative Geometry (Expanded Version)”. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 18B, págs. 29-47 (vid. pág. 14).
- Courant, R. e Hilbert, D. (1934). *Methoden der Mathematischen Physik II*. Berlin (vid. pág. 43).
- De Boer, J., Peeters, B., Skenderis, K. y van Nieuwenhuizen, P. (1995). “Loop calculations in quantum mechanical nonlinear sigma models”. *Nucl. Phys. B* 446, págs. 211-222. arXiv: [hep-th/9504097](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 81).
- DeWitt, B. S. (1967). “Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory”. *Phys. Rev.* 160, págs. 1113-1148 (vid. pág. 43).
- Disertori, M., Gurau, R., Magnen, J. y Rivasseau, V. (2007). “Vanishing of Beta Function of Non Commutative $\Phi^4(4)$ Theory to all orders”. *Phys. Lett. B* 649, págs. 95-102. arXiv: [hep-th/0612251](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 17, 103, 142).
- Disertori, M. y Rivasseau, V. (2007). “Two and three loops beta function of non commutative $\Phi(4)^4$ theory”. *Eur. Phys. J. C* 50, págs. 661-671. arXiv: [hep-th/0610224](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 17).
- Doplicher, S., Fredenhagen, K. y Roberts, J. E. (1995). “The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields”. *Commun. Math. Phys.* 172, págs. 187-220. arXiv: [hep-th/0303037](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 15).
- Douglas, M. R. y Nekrasov, N. A. (2001). “Noncommutative field theory”. *Rev. Mod. Phys.* 73, págs. 977-1029. arXiv: [hep-th/0106048](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 73).
- Dowker, J. S. y Critchley, R. (1976). “Effective Lagrangian and Energy Momentum Tensor in de Sitter Space”. *Phys. Rev. D* 13, pág. 3224 (vid. pág. 30).
- Dubois-Violette, M., Kerner, R. y Madore, J. (1990). “Noncommutative Differential Geometry and New Models of Gauge Theory”. *J. Math. Phys.* 31, pág. 323 (vid. pág. 14).
- Dunne, G., Gies, H., Klingmuller, K. y Langfeld, K. (2009). “Worldline Monte Carlo for fermion models at large $N(f)$ ”. *JHEP* 0908, pág. 010. arXiv: [0903.4421](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 19).

- Dunne, G. y Schubert, C. (2006). “Pair creation in inhomogeneous fields from world-line instantons”. *AIP Conf.Proc.* 857, págs. 240-248. arXiv: [hep-ph/0604089 \[hep-ph\]](#) (vid. pág. 19).
- Dyson, F. (1949). “The S matrix in quantum electrodynamics”. *Phys. Rev.* 75, págs. 1736-1755 (vid. págs. 13, 30).
- Einstein, A. (1916). “Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation”. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pág. 688 (vid. pág. 139).
- Elizalde, E. (2012). “Ten physical applications of spectral zeta functions”. *Lect. Notes Phys.* 855, págs. 1-225 (vid. pág. 37).
- Elizalde, E., Bordag, M. y Kirsten, K. (1998). “Casimir energy for a massive fermionic quantum field with a spherical boundary”. *J. Phys.* A31, págs. 1743-1759. arXiv: [hep-th/9707083 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 33).
- Estrada, R., Gracia-Bondia, J. M. y Varilly, J. C. (1989). “On Asymptotic expansions of twisted products”. *J. Math. Phys.* 30, págs. 2789-2796 (vid. pág. 76).
- Everitt, C. W. F. et al. (2011). “Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity”. *Phys. Rev. Lett.* 106, pág. 221101. arXiv: [1105.3456 \[gr-qc\]](#) (vid. pág. 12).
- Falomir, H., Franchino Viñas, S. A., Pisani, P. A. G. y Vega, F. (2013). “Boundaries in the Moyal plane”. *JHEP* 1312, pág. 024. arXiv: [1307.4464 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 21, 100, 142).
- Falomir, H., Muschietti, M., Pisani, P. y Seeley, R. (2003). “Unusual poles of the zeta functions for some regular singular differential operators”. *J.Phys.* A36, págs. 9991-10010. arXiv: [math-ph/0303030 \[math-ph\]](#).
- Falomir, H. y Pisani, P. (2006). “Krein’s formula and heat-kernel expansion for some differential operators with a regular singularity”. *J.Phys.* A39, págs. 6333-6340. arXiv: [math-ph/0512057 \[math-ph\]](#).
- Falomir, H., Pisani, P. y Wipf, A. (2002). “Pole structure of the Hamiltonian zeta function for a singular potential”. *J.Phys.* A35, págs. 5427-5444. arXiv: [math-ph/0112019 \[math-ph\]](#).
- Feynman, R. P. (1948). “Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics”. *Rev. Mod. Phys.* 20, págs. 367-387 (vid. pág. 18).
- Feynman, R. (1950). “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction”. *Phys.Rev.* 80, págs. 440-457 (vid. págs. 18, 30).
- Filk, T. (1990). “Field theory on the quantum plane” (vid. pág. 14).
- Fock, V. (1937). “Proper time in classical and quantum mechanics”. *Phys. Z. Sowjetunion* 12, págs. 404-425 (vid. pág. 43).
- Franchino Viñas, S. A. y Pisani, P. A. G. (2011). “Semi-transparent Boundary Conditions in the Worldline Formalism”. *J. Phys.* A44, pág. 295401. arXiv: [1012.2883 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 21).
- (2014). “Worldline approach to the Grosse-Wulkenhaar model”. *JHEP* 1411, pág. 087. arXiv: [1406.7336 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 21).
- Frohlich, J. (1982). “On the Triviality of Lambda (ϕ^{**4}) in D-Dimensions Theories and the Approach to the Critical Point in D \leq Four-Dimensions”. *Nucl.Phys.* B200, págs. 281-296 (vid. págs. 17, 64).
- Gatteschi, L. (2002). “Asymptotics and bounds for the zeros of Laguerre polynomials: a survey”. *J. Comput. Appl. Math.* 144, pág. 7 (vid. pág. 102).

- Gayral, V., Gracia-Bondia, J. M. y Ruiz, F. R. (2005). “Trouble with space-like noncommutative field theory”. *Phys. Lett.* B610, págs. 141-146. arXiv: [hep-th/0412235](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 90, 95).
- Gayral, V., Iochum, B. y Vassilevich, D. V. (2007). “Heat kernel and number theory on NC-torus”. *Commun. Math. Phys.* 273, págs. 415-443. arXiv: [hep-th/0607078](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 90, 91).
- Gayral, V. y Iochum, B. (2005). “The Spectral action for Moyal planes”. *J. Math. Phys.* 46, pág. 043503. arXiv: [hep-th/0402147](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 89).
- Gies, H. y Klingmuller, K. (2005). “Pair production in inhomogeneous fields”. *Phys. Rev.* D72, pág. 065001. arXiv: [hep-ph/0505099](#) [[hep-ph](#)] (vid. pág. 19).
- (2006a). “Casimir edge effects”. *Phys. Rev. Lett.* 97, pág. 220405. arXiv: [quant-ph/0606235](#) [[quant-ph](#)] (vid. págs. 19, 69).
- Gies, H. y Klingmuller, K. (2006b). “Quantum energies with worldline numerics”. *J. Phys.* A39, págs. 6415-6422. arXiv: [hep-th/0511092](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 19, 69).
- (2006c). “Worldline algorithms for Casimir configurations”. *Phys. Rev.* D74, pág. 045002. arXiv: [quant-ph/0605141](#) [[quant-ph](#)] (vid. págs. 19, 69).
- Gies, H., Langfeld, K. y Moyaerts, L. (2003). “Casimir effect on the worldline”. *JHEP* 0306, pág. 018. arXiv: [hep-th/0303264](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 19, 69).
- Gilkey, P. B. (1995). “Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem” (vid. págs. 44, 46, 47).
- Gomis, J. y Mehen, T. (2000). “Space-time noncommutative field theories and unitarity”. *Nucl. Phys.* B591, págs. 265-276. arXiv: [hep-th/0005129](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 95).
- Goursac, A. de (2010). “On the origin of the harmonic term in noncommutative quantum field theory”. *SIGMA* 6, pág. 048. arXiv: [1003.5788](#) [[math-ph](#)] (vid. págs. 103, 143).
- Goursac, A. de, Wallet, J.-C. y Wulkenhaar, R. (2007). “Noncommutative Induced Gauge Theory”. *Eur. Phys. J.* C51, págs. 977-987. arXiv: [hep-th/0703075](#) [[HEP-TH](#)] (vid. pág. 143).
- Gracia-Bondia, J. M., Varilly, J. C. y Figueroa, H. (2001). “Elements of noncommutative geometry” (vid. pág. 75).
- Groenewold, H. J. (1946). “On the Principles of elementary quantum mechanics”. *Physica* 12, págs. 405-460 (vid. pág. 14).
- Gross, D. J. y Wilczek, F. (1973). “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories”. *Phys. Rev. Lett.* 30, págs. 1343-1346 (vid. pág. 17).
- Grosse, H., Krajewski, T. y Wulkenhaar, R. (2000). “Renormalization of noncommutative Yang-Mills theories: A Simple example”. arXiv: [hep-th/0001182](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 143).
- Grosse, H. y Vignes-Tourneret, F. (2010). “Quantum field theory on the degenerate Moyal space”. *J. Noncommut. Geom.* 4, págs. 555-576. arXiv: [0803.1035](#) [[math-ph](#)] (vid. pág. 125).
- Grosse, H. y Wohlgenannt, M. (2007). “Induced gauge theory on a noncommutative space”. *Eur. Phys. J.* C52, págs. 435-450. arXiv: [hep-th/0703169](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 143).
- (2012). “Degenerate noncommutativity”. *Eur. Phys. J.* C72, pág. 2153. arXiv: [1201.5982](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 124, 125).

- Grosse, H. y Wulkenhaar, R. (2003). “Renormalization of ϕ^4 theory on noncommutative R^2 in the matrix base”. *JHEP* 0312, pág. 019. arXiv: [hep-th/0307017 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 74, 103, 104).
- (2004). “The beta function in duality covariant noncommutative ϕ^4 theory”. *Eur. Phys. J. C* 35, págs. 277-282. arXiv: [hep-th/0402093 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 17, 114).
- (2005). “Renormalization of ϕ^4 theory on noncommutative R^4 in the matrix base”. *Commun. Math. Phys.* 256, págs. 305-374. arXiv: [hep-th/0401128 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 16, 74, 103).
- (2013). “Construction of the Φ_4^4 -quantum field theory on noncommutative Moyal space”. *RIMS Kokyuroku* 1904, págs. 67-105. arXiv: [1402.1041 \[math-ph\]](#) (vid. págs. 18, 103).
- (2014a). “Self-Dual Noncommutative ϕ^4 -Theory in Four Dimensions is a Non-Perturbatively Solvable and Non-Trivial Quantum Field Theory”. *Commun. Math. Phys.* 329, págs. 1069-1130. arXiv: [1205.0465 \[math-ph\]](#) (vid. págs. 17, 103).
- (2014b). “Solvable 4D noncommutative QFT: phase transitions and quest for reflection positivity”. arXiv: [1406.7755 \[hep-th\]](#) (vid. págs. 18, 103).
- Grubb, G. y Seeley, R. T. (1995). “Weakly parametric pseudodifferential operators and Atiyah-Patodi-Singer boundary problems”. *Invent. Math.* 121, págs. 481-529 (vid. pág. 49).
- Hadamard, J. (1932). *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris: Hermann & Cie. (vid. pág. 43).
- Hawking, S. W. (1977). “Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-Time”. *Commun. Math. Phys.* 55, pág. 133 (vid. pág. 30).
- Heisenberg, W. (1930). “Die Selbstenergie des Elektrons”. German. *Zeitschrift für Physik* 65.1-2, págs. 4-13 (vid. pág. 13).
- Ifantis, E. y Siafarikas, P. (1985). “A differential equation for the zeros of Bessel functions”. *Appl. Anal.* 20, pág. 269 (vid. pág. 102).
- Itzykson, C. y Zuber, J. B. (1980). “Quantum Field Theory” (vid. pág. 36).
- Kac, M. (1966). “Can one hear the shape of a drum?” *Am. Math. Mon.* 73, págs. 1-23 (vid. pág. 43).
- Kempf, A. (1994). “Quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta”. arXiv: [hep-th/9405067 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 16).
- Kirsten, K. (2000). “Spectral functions in mathematics and physics”. arXiv: [hep-th/0007251 \[hep-th\]](#).
- Kirsten, K., Loya, P. y Park, J. (2008). “The Ubiquitous zeta-function and some of its ‘usual’ and ‘unusual’ meromorphic properties”. *J. Phys.* A41, pág. 164070. arXiv: [0812.0385 \[math-ph\]](#).
- Kleinert, H. (2004). “Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets” (vid. págs. 18, 24).
- Klingmüller, K. y Gies, H. (2008). “Geothermal Casimir Phenomena”. *J. Phys.* A41, pág. 164042. arXiv: [0710.4473 \[quant-ph\]](#) (vid. págs. 19, 69).
- Kontsevich, M. y Vishik, S. (1994). “Determinants of elliptic pseudodifferential operators”. arXiv: [hep-th/9404046 \[hep-th\]](#) (vid. pág. 29).
- Landau, L. D., Abrikosov, A. y Halatnikov, L. (1956). “On the Quantum theory of fields”. *Nuovo Cim. Suppl.* 3, págs. 80-104 (vid. pág. 16).

- Landi, G. (1997). “An Introduction to noncommutative spaces and their geometry”. arXiv: [hep-th/9701078 \[hep-th\]](#) (vid. pág. [75](#)).
- Langmann, E., Szabo, R. y Zarembo, K. (2004). “Exact solution of quantum field theory on noncommutative phase spaces”. *JHEP* 0401, pág. 017. arXiv: [hep-th/0308043 \[hep-th\]](#) (vid. pág. [119](#)).
- Langmann, E. y Szabo, R. J. (2002). “Duality in scalar field theory on noncommutative phase spaces”. *Phys. Lett.* B533, págs. 168-177. arXiv: [hep-th/0202039 \[hep-th\]](#) (vid. págs. [16](#), [103](#), [114](#)).
- Lehmann, H., Symanzik, K. y Zimmermann, W. (1955). “On the formulation of quantized field theories”. *Nuovo Cim.* 1, págs. 205-225 (vid. pág. [25](#)).
- Lizzi, F., Vitale, P. y Zampini, A. (2005). “The Beat of a fuzzy drum: Fuzzy Bessel functions for the disc”. *JHEP* 0509, pág. 080. arXiv: [hep-th/0506008 \[hep-th\]](#) (vid. pág. [100](#)).
- (2006). “The fuzzy disc: A review”. *J.Phys.Conf.Ser.* 53, págs. 830-842 (vid. pág. [100](#)).
- Madore, J. (1992). “The Fuzzy sphere”. *Class.Quant.Grav.* 9, págs. 69-88 (vid. pág. [100](#)).
- Matsubara, K. (2000). “Restrictions on gauge groups in noncommutative gauge theory”. *Phys. Lett.* B482, págs. 417-419. arXiv: [hep-th/0003294 \[hep-th\]](#) (vid. pág. [143](#)).
- Matusis, A., Susskind, L. y Toumbas, N. (2000). “The IR / UV connection in the noncommutative gauge theories”. *JHEP* 0012, pág. 002. arXiv: [hep-th/0002075 \[hep-th\]](#) (vid. pág. [143](#)).
- Mehler, F. G. (1866). “Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung”. *J. Reine Angew. Math.* 66, pág. 161 (vid. pág. [131](#)).
- Milton, K. A. (2001). “The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy” (vid. pág. [33](#)).
- Milton, K. A. (2004). “Casimir energies and pressures for delta function potentials”. *J. Phys.* A37, págs. 6391-6406. arXiv: [hep-th/0401090 \[hep-th\]](#) (vid. pág. [72](#)).
- Minakshisundaram, S. y Pleijel, A. (1949). “Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds”. *Can. J. Math.* 1, págs. 242-256 (vid. pág. [44](#)).
- Minwalla, S., Van Raamsdonk, M. y Seiberg, N. (2000). “Noncommutative perturbative dynamics”. *JHEP* 0002, pág. 020. arXiv: [hep-th/9912072 \[hep-th\]](#) (vid. págs. [16](#), [73](#), [94](#), [95](#), [103](#), [115](#)).
- Mohideen, U. y Roy, A. (1998). “Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 micrometers”. *Phys. Rev. Lett.* 81, págs. 4549-4552. arXiv: [physics/9805038 \[physics\]](#) (vid. pág. [33](#)).
- Moyal, J. E. (1949). “Quantum mechanics as a statistical theory”. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 45, págs. 99-124 (vid. pág. [14](#)).
- Peskin, M. E. y Schroeder, D. V. (1995). “An Introduction to quantum field theory” (vid. pág. [11](#)).
- Plunien, G., Muller, B. y Greiner, W. (1986). “The Casimir Effect”. *Phys. Rept.* 134, págs. 87-193 (vid. pág. [33](#)).
- Polchinski, J. (1984). “Renormalization and Effective Lagrangians”. *Nucl. Phys.* B231, págs. 269-295 (vid. pág. [32](#)).

- Politzer, H. D. (1973). “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?” *Phys. Rev. Lett.* 30, págs. 1346-1349 (vid. pág. 17).
- Rivasseau, V. (2007). “Non-commutative Renormalization”. arXiv: 0705.0705 [hep-th] (vid. pág. 103).
- Rivasseau, V., Vignes-Tourneret, F. y Wulkenhaar, R. (2006). “Renormalization of noncommutative ϕ^4 -theory by multi-scale analysis”. *Commun. Math. Phys.* 262, págs. 565-594. arXiv: hep-th/0501036 [hep-th] (vid. pág. 103).
- Rovelli, C. (2004). *Quantum gravity*. Cambridge: Cambridge Univ. Pr. (vid. pág. 139).
- Salecker, H. y Wigner, E. P. (1958). “Quantum limitations of the measurement of space-time distances”. *Phys. Rev.* 109, págs. 571-577 (vid. pág. 12).
- Sato, H.-T. (1999). “Worldline Green functions with momentum and source conservations”. *J. Math. Phys.* 40, págs. 5641-5656. arXiv: hep-th/9906068 [hep-th] (vid. págs. 19, 142).
- Sato, H.-T. y Schmidt, M. G. (1999). “Worldline approach to the Bern-Kosower formalism in two loop Yang-Mills theory”. *Nucl. Phys.* B560, págs. 551-586. arXiv: hep-th/9812229 [hep-th] (vid. págs. 19, 142).
- Schalm, K. y van Nieuwenhuizen, P. (1999). “Trace anomalies and the string inspired definition of quantum - mechanical path integrals in curved space”. *Phys. Lett.* B446, págs. 247-255. arXiv: hep-th/9810115 [hep-th] (vid. pág. 55).
- Schubert, C. (1996). “An Introduction to the worldline technique for quantum field theory calculations”. *Acta Phys. Polon.* B27, págs. 3965-4001. arXiv: hep-th/9610108 [hep-th] (vid. págs. 19, 142).
- (2001). “Perturbative quantum field theory in the string inspired formalism”. *Phys. Rept.* 355, págs. 73-234. arXiv: hep-th/0101036 [hep-th] (vid. págs. 18, 53, 142).
- Schwinger, J. (1951). “On gauge invariance and vacuum polarization”. *Phys. Rev.* 82, págs. 664-679 (vid. pág. 35).
- (1959). “Euclidean Quantum Electrodynamics”. *Phys. Rev.* 115, págs. 721-731 (vid. pág. 18).
- Schwinger, J. S. (1948). “Quantum electrodynamics. 2. Vacuum polarization and selfenergy”. *Phys. Rev.* 75, pág. 651 (vid. pág. 30).
- Seeley, R. T. (1967). “Complex powers of an elliptic operator”. *Proc. Symp. Pure Math.* 10, págs. 288-307 (vid. pág. 44).
- (1969a). “Analytic Extension of the Trace Associated with Elliptic Boundary Problems”. English. *American Journal of Mathematics* 91.4, págs. 963-983 (vid. pág. 44).
- (1969b). “The Resolvent of an Elliptic Boundary Problem”. English. *American Journal of Mathematics* 91.4, págs. 889-920 (vid. pág. 44).
- Seiberg, N., Susskind, L. y Toumbas, N. (2000). “Space-time noncommutativity and causality”. *JHEP* 0006, pág. 044. arXiv: hep-th/0005015 [hep-th] (vid. pág. 95).
- Seiberg, N. y Witten, E. (1999). “String theory and noncommutative geometry”. *JHEP* 9909, pág. 032. arXiv: hep-th/9908142 [hep-th] (vid. pág. 15).
- Sfondrini, A. y Koslowski, T. A. (2011). “Functional Renormalization of Noncommutative Scalar Field Theory”. *Int. J. Mod. Phys.* A26, págs. 4009-4051. arXiv: 1006.5145 [hep-th] (vid. pág. 103).

- Shifman, M. A. y Vainshtein, A. I. (1999). “Instantons versus supersymmetry: Fifteen years later”. arXiv: [hep-th/9902018](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 18).
- Snyder, H. S. (1947a). “The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time”. *Phys. Rev.* 72, págs. 68-71 (vid. pág. 14).
- Snyder, H. S. (1947b). “Quantized space-time”. *Phys. Rev.* 71, págs. 38-41 (vid. pág. 13).
- Strassler, M. J. (1992). “Field theory without Feynman diagrams: One loop effective actions”. *Nucl. Phys.* B385, págs. 145-184. arXiv: [hep-ph/9205205](#) [[hep-ph](#)] (vid. pág. 19).
- Suslov, I. M. (2008). “Is ϕ^4 theory trivial?” arXiv: [0806.0789](#) [[hep-ph](#)] (vid. págs. 17, 64).
- Szabo, R. J. (2003). “Quantum field theory on noncommutative spaces”. *Phys. Rept.* 378, págs. 207-299. arXiv: [hep-th/0109162](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 73).
- ’t Hooft, G. y Veltman, M. (1972). “Proceedings, Colloquium on Renormalization of Yang-Mills Fields, Marseille, June 19-23, 1972” (vid. pág. 17).
- ’t Hooft, G. (1976a). “Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle”. *Phys. Rev.* D14, págs. 3432-3450 (vid. pág. 18).
- (1976b). “Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies”. *Phys. Rev. Lett.* 37, págs. 8-11 (vid. pág. 18).
- Tomonaga, S.-I. y Oppenheimer, J. (1948). “On Infinite Field Reactions in Quantum Field Theory”. *Phys. Rev.* 74, págs. 224-225 (vid. pág. 30).
- Vandoren, S. y van Nieuwenhuizen, P. (2008). “Lectures on instantons”. arXiv: [0802.1862](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 18).
- Vassilevich, D. V. (2003). “Heat kernel expansion: User’s manual”. *Phys. Rept.* 388, págs. 279-360. arXiv: [hep-th/0306138](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 30).
- (2004). “Noncommutative heat kernel”. *Lett. Math. Phys.* 67, págs. 185-194. arXiv: [hep-th/0310144](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 87, 89).
- (2005). “Heat kernel, effective action and anomalies in noncommutative theories”. *JHEP* 0508, pág. 085. arXiv: [hep-th/0507123](#) [[hep-th](#)] (vid. pág. 90).
- Weber, A. y Gies, H. (2010a). “Geothermal Casimir phenomena for the sphere-plate and cylinder-plate configurations”. *Phys. Rev.* D82, pág. 125019. arXiv: [1003.3420](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 19, 69).
- (2010b). “Non-monotonic thermal Casimir force from geometry-temperature interplay”. *Phys. Rev. Lett.* 105, pág. 040403. arXiv: [1003.0430](#) [[hep-th](#)] (vid. págs. 19, 69).
- Weyl, H. (1927). “Quantenmechanik und Gruppentheorie”. German. *Zeitschrift für Physik* 46.1-2, págs. 1-46 (vid. págs. 14, 75).
- Weyl, H. (1912). “Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)”. German. *Mathematische Annalen* 71.4, págs. 441-479 (vid. pág. 43).
- Wightman, A. S. (1956). “Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values”. *Phys. Rev.* 101, págs. 860-866 (vid. pág. 17).
- Wigner, E. P. (1932). “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”. *Phys. Rev.* 40, págs. 749-760 (vid. págs. 14, 76).
- Wilson, K. G. y Kogut, J. B. (1974). “The Renormalization group and the epsilon expansion”. *Phys. Rept.* 12, págs. 75-200 (vid. pág. 32).

- Wloka, J. T., Rowley, B. y Lawruk, B. (1995). *Boundary value problems for elliptic systems*. New York: Cambridge University Press (vid. pág. [44](#)).
- Wolff, U. (2009). “Precision check on triviality of ϕ^4 theory by a new simulation method”. *Phys. Rev. D* 79, pág. 105002. arXiv: [0902.3100 \[hep-lat\]](#) (vid. págs. [17](#), [64](#)).