Métodos de la física Matemática 2023 **Prof. Guillermo Silva**
Departamento de Física - UNLP **silva@fisica.unlp.edu.ar**

Motivación

Métodos de la Física Matemática se dicta en el segundo semestre de cada año y consta de tres unidades Teoría de Grupos, Técnicas asintóticas y Análisis Funcional.

· Técnicas asintóticas: discutimos distintas técnicas perturbativas de aproximación.

· Teoría de Grupos: desarrolla las nociones básicas para formalizar el concepto de simetría en física.

· Análisis funcional: presenta las nociones e ideas relevantes para arribar al concepto de espacio de Hilbert, que es el punto de partida para el estudio de sistemas cuánticos.

Los temas de la materia son de carácter formal, hacemos énfasis en la relación entre definiciones matemáticas y conceptos físicos.

—

Programa

. Técnicas asintóticas

Expansiones asintóticas y Teorías N grande: soluciones integrales de ecuaciones diferenciales lineales. Metodos de Laplace, fase estacionaria y saddle point. Fenómeno de Stokes. Resumación de Borel.

Bibliografía

. *Mathematics for physics*, Goldbart+Stone.
. *Expansiones asintóticas*, Notas de clase, G Silva.
. *Instantons and Large N*, M Mariño.

. Teoría de Grupos

Elementos básicos: Axiomas. Isomorfismos y Homomorfismos. Representación lineal de G. Definición de subgrupo. Teorema de Lagrange. Teorema de Cayley. Cosets. Clases de elementos conjugados y su interpretación física. Diagramas de Young y grupo de permutaciones. Definición de subgrupo invariante. Grupos simples y semisimples. Grupo cociente. Teorema de homomorfismos Producto directo de grupos. Centro de un grupo.

Representaciones de grupos discretos: Representaciones equivalentes. Representación conjugada y contragradiente. Representaciones reales, pseudoreales y complejas. Suma directa y producto directo. Representaciones reducibles e irreducibles. Unitariedad. Teorema de Schur. Relaciones de ortogonalidad para representaciones irreducibles de grupos de orden finito. Funciones de clase, caracteres simples. Criterio de irreducibilidad. Tabla de caracteres. Algebra de un grupo de orden finito, representación regular. Teorema de Burnside. Proyectores. Aplicaciones físicas de la teoría de grupos al cálculo del espectro de fluctuaciones y modos normales de moléculas.

Teoría de Grupos y Mecánica cuántica: Operadores sobre espacios de funciones. Definición de simetría en Mecánica cuántica, degeneración. Números cuánticos e índices de representaciones irreducibles. Teorema de Bloch. Grupos de simetría y reglas de selección para elementos de matriz.

Grupos de Lie: Variedad de grupo, dimensión de un grupo. Grupos conexos y compactos. Grupo de homotopía. Grupos simplemente conexos. Ejemplos: $O(2), SL(2,\mathbb{R})$. Grupos clásicos de matrices.

Algebras de Lie: Elementos de geometría diferencial: planos tangentes y vectores, álgebra de Lie. Push-forward y pull-back. Mapeo exponencial. Traslaciones a izquierda y derecha en G. Campos vectoriales invariantes a izquierda y derecha. Constantes de estructura de un grupo. Generadores. Algebras de Lie de grupos de matrices. Aplicación exponencial. Problema del cubrimiento, producto de mapeos exponenciales. Geometría y representantes de cosets. Representación regular y métrica invariante de Killing-Cartan. Métrica G-invariantes y bi-invariante sobre G.

Grupo de rotaciones: Algebras de Lie de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ y variedades de los grupos. Homomorfismo $SU(2) \to SO(3)$. Constantes de estructura totalmente antisimétricas, invariante cuadrático de Casimir. Medida de integración invariante y Teorema de Peter-Weyl. Representaciones unitarias irreducibles del grupo $SU(2)$. Ortogonalidad de caracteres. Producto directo de representaciones irreducibles. Descomposición de Clebsh+Gordan.

Grupo de Lorentz y Grupo de Poincare: Métrica de Minkowski y grupos de Lorentz $SO(3,1)$ y Poincaré $ISO(3,1)$. Álgebra $so(3,1)$ y su complexificación. Representaciones irreducibles. Grupo de cubrimiento $SL(2,\mathbb{C})$, homomorfismo $SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$. Grupo de Clifford, álgebra de matrices gamma. Teorema de Pauli. Espinores de Dirac, Majorana y Weyl. Grupo de Poincare $ISO(3,1)$ y sus representaciones. Vector de Pauli-Ljubanski, helicidad.

Bibliografía

. *Mathematics for physics*, Goldbart+Stone.
. *Group Theory and Quantum Mechanics*, M Tinkham.
. *Group theory in Physics: an introduction*, Cornwell.
. *Lie algebras in parycile physics*, Georgi.
. *Quantum Mechanics*, L Landau
. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, B Schutz.
. *Group Theory and its Applications to Physical Problems*, M Hammermesh.
. *Applications of Group Theory to the Physics of Solids*, M Dresselhaus, MIT notes.
. *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*, R Gilmore.
. *Teoría de grupos: notas de clase*, H Falomir, UNLP.
. *Quantum Field Theory I*, S Weinberg.

. Análisis Funcional

Espacios de Hilbert: Espacios de funciones, definiciones y ejemplos. Distintas nociones de normas y convergencia. Secuencias de Cauchy y espacios completos. Producto interno en un espacio de funciones. Espacio de Hilbert, definición. Espacio de funciones de cuadrado sumable $L^2(a,b)$. Desigualdad de Bessel y Teorema de Parseval. Conjuntos ortonormales, polinomios ortogonales.

Operadores sobre espacios de funciones: Operador adjunto, definición. Operador hermítico. Condiciones de contorno autoadjuntas. Ejemplos: operador impulso y operador Sturm-Liouville, c.c. de Robin. Norma de un operador. Operadores acotados. Operadores completamente continuos. Autovalores y autovectores de operadores simétricos completamente continuos. Descomposición espectral. Operador integral de Fredholm. Ecuaciones integrales inhomogéneas. Operadores con inversa simétrica completamente continua. Problema de Sturm - Liouville.

Transformacón de Fourier en $L^2(R)$: Transformación de Fourier en $L^1(R)$. Subespacios densos en $L^2(R)$: $C^0(R)$. El espacio de Schwartz. Teorema de Plancherel.

Teoría de Distribuciones: Operadores lineales y distribuciones. Teorema de Riesz-Frechet. Espacio de funciones de prueba. Funciones generalizadas (o distribuciones). Distribuciones regulares y singulares. Límite de secuencias de distribuciones. Diferenciación de distribuciones. Regularización de integrales divergentes. La distribución $(x_+)^\lambda$. Transformación de Fourier de distribuciones, continuidad. Distribuciones temperadas. Convolución de distribuciones. Soluciones fundamentales de ecuaciones diferenciales. Integración y diferenciación de orden arbitrario. Descomposición en distribuciones propias.

Bibliografía

. *Quantum Field Theory, Vol 1*, Zeidler.
. *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*, R. Courant y D. Hilbert.
. *Functional analysis*, Y. Vilenkin.
. *Notas de clase*, H. Falomir.
. *Mathematics for physics II*, M. Stone.
. *Generalized functions*, Vol. I, I. Gelfand y G. Shilov.
. *An introduction to the theory of linear spaces*, G. Shilov.

Desarrollo del curso

El curso tiene una duración de 16 semanas y se desarrolla en el segundo semestre del año (Ago-Nov). Por semana se dictan dos clases teóricas de 2hr de duración. Asimismo, semanalmente se imparten dos clases prácticas de dos horas cada una donde se resuelven problemas y se atienden consultas relacionadas a la materia.

Carreras

Materia optativa de Licenciatura en Física, Licenciatura en Astronomía, Licenciatura en Matemática (UNLP) y carreras afines.